Лекция 1

Волны

1. Введение
2. Что такое волна. Какие бывают волны
2.1. Синусоидальные волны. Распространение колебаний
2.2. Волна плоская, цилиндрическая, сферическая
2.3. Волны продольные и поперечные. Поляризация

Лекция 2

3.1. Возникновение волны. Группа волн
3.2. Точечный источник волн
3.3. Множество точечных источников

Лекция 3

3.4. Периодически расположенные точечные источники волн
3.5. "Точный" расчет углового распределения потока энергии от системы источников
3.5.1. Непрерывное распределение источников
3.5.2. Излучение пары точечных источников
3.5.3. Излучение цепочки периодически расположенных источников

Лекция 4

4. Законы геометрической оптики
4.1. Прямолинейность распространения света. Принцип Ферма
4.2. Отражение света. Плоское зеркало
4.3. Сложение гармонических колебаний

Лекция 5

4.4. Эллиптическое зеркало. Уточненная формулировка принципа Ферма
4.5. Сферическое зеркало
4.6. Параболическое зеркало
4.7. Закон преломления света
4.7.1. Скорость света в веществе

Лекция 6

4.7.2. Преломление света
4.7.3. Дисперсия и поглощение света
4.7.4. Групповая и фазовая скорости света в веществе
4.7.5. Аномальная дисперсия

Лекция 7

5. Распространение (плоской) волны. Некоторые "тонкости"
6.1. Отражение света на границе раздела двух сред. Угол Брюстера
6.2. Полное отражение

Лекция 8

7. Линза
7.1. Фокусные расстояние для сферической поверхности
7.2. Фокусное расстояние линзы
7.3. Фокусное расстояние линзы. Другой подход
7.4. Построение изображения предмета. Увеличение

Лекция 9

8. Интерференция
8.1. Двухлучевая интерференция. Точечные источники
8.2. Опыт Юнга. Когерентность волн
8.3. Длина когерентности
8.4. Линии равного наклона

Лекция 10

8.5. Линии равной толщины
8.6. Интерферометры
8.6.1. Интерферометр Линника
8.6.2. Интерферометр Рэлея
8.6.3. Звездный интерферомент Майкельсона
8.6.4. Интерферометр Фабри-Перо

Лекция 11

8.6.5 Интерферометр Фабри-Перо. Угловое распределение амплитуды проходящей волны
9. Дифракция Фраунгофера
9.1. Дифракция на щели
9.2. Дифракционная решетка
9.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Лекция 12

10. Дифракция на круглом отверстии
10.1. Зоны Френеля
10.2. Обсуждение полученных результатов. Зонная пластинка
10.3. Линза как дифракционный прибор
10.4. Пятно Пуассона

Лекция 13

11.1. Свет поляризованный и неполяризованный. Закон Малюса
11.2. Одноосные кристаллы
11.3. Скрещенные поляризаторы
11.4. Двойное лучепреломление
11.5. Поляризаторы

Лекция 14

11.6. Анализ поляризованного света
11.7. Естественное вращенние плоскости поляризации
11.8. Эффект Зеемана и поляризация
11.9. Искусственное двойное лучепреломление

Лекция 15

12. Тепловое излучение
12.1. Основные понятия. Закон Кирхгофа
12.2. Плотность лучистой энергии
12.3. Лучистая энергия
12.4. Формула Планка

Лекция 16

12.5. Закон Стефана-Больцмана и закон Вина
12.7. Оптическая пирометрия
13.1. Теплоемкость кристаллической решетки

Лекция 17

13.2. Теплоемкость кристаллической решетки. Продолжение
14.1. Преобразования Лоренца
14.2. Эффект Допплера
14.3. Поперечный эфект Допплера. Аберрация

Лекция 18

15. Фотоны
16. Примеры использования понятия фотона
16.1. Опыт Боте
16.2. Энергетические соотношения
16.3. Эффект Комптона

Лекция 19

17. Гипотеза де Бройля
18.1. Дифракция электрона на двух щелях
18.2. Соотношения неопределенностей
18.3. Уравнение Шрёдингера

Лекция 20

18.4. Стоячая волна
18.5. Физический смысл волновой функции
19.1. Как нам это объясняют

Лекция 21

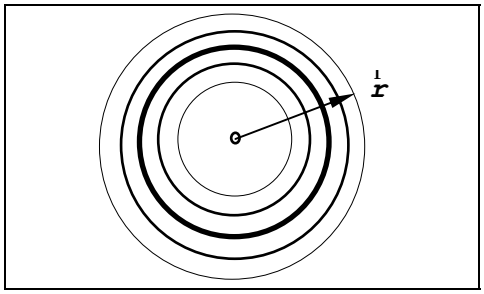
19.2. Как нам это понимать
19.3. Парадокс Больцмана
19.4. Химические элементы
19.5. Нормирование волновой функции

Лекция 22

20. Стоячие волны. Рефракция
21. "Внутреннее движение" квантового состояния
22. Квантование момента импульса
23. Классический гироскоп в магнитном поле

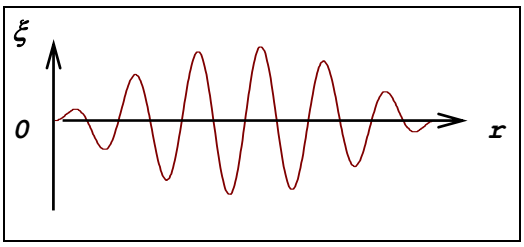
Лекция 2

3.1. Возникновение волны. Группа волн



Пожалуй, самыми наглядными являются волны на поверхности воды. Их можно просто увидеть невооруженным взглядом. При каких условиях возникают такие волны? Проще всего бросить камень, скажем, в пруд со спокойной поверхностью воды. От места падения камня начнет распространяться волна, которую можно назвать кольцевой. Ее амплитуда в зависимости от расстояния до точки падения будет изменяться так же, как и у волны цилиндрической.

Однако, это не совсем такая волна, о которой мы говорили. Синусоидальная волна не должна иметь начала или конца, чего, конечно, нельзя сказать о волне, возникшей при падении камня в воду.



В этом случае будет распространяться так называемая "*группа волн*". Выбрав некоторое направление, мы увидим волну с возрастающей и затем убывающей амплитудой. В оптике такую волну называют *цугом*. Почему она называется группой должно быть понятно из дальнейшего.

Совсем не обязательно, чтобы такая группа волн имела показанную на рисунке динамику увеличения и уменьшения амплитуды, показанный профиль. Для нас важнее понять, почему волна в этом случае имеет название "группы". Для этого надо вспомнить возникновение биений, которые наблюдаются при сложении колебаний *близких* частот. Разность фаз таких колебаний

$$\delta(t) = \omega_1 t - \omega_2 t = (\omega_1 - \omega_2)\cdot t$$

изменяется достаточно медленно. Между моментами, когда амплитуда суммарных колебаний

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega_1 t) + \xi_0 \cos(\omega_2 t) =$$

$$= \underline{2\xi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)} \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) =$$

$$= \underline{2\xi_0 \cos(\Delta\omega t)} \cos(\omega t)$$

со средней частотой $\omega \approx \omega_1 \approx \omega_2$ обращается в нуль, проходит достаточно много (по сравнению с периодом колебаний) времени:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t_2 = \frac{3}{2}\pi;$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

поскольку разность частот колебаний много меньше средней частоты: $\Delta\omega \ll \omega$. Поэтому мы наблюдаем приблизительно гармонические колебания с медленно изменяющейся амплитудой. Амплитудой в этом случае называется произведение подчеркнутых сомножителей в выписанных выше выражениях.

Предположим теперь, что вдоль некоторого направления распространяются плоские волны с близкими длинами волн. Соответственно и частоты распространяющихся с ними колебаний будут близкими. В каждой точке, например, в точке $x = 0$ будут наблюдаться биения:

$$\xi(x,t)\big|_{x=0} = \left[\xi_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \xi_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right]\Big|_{x=0} = \\ = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t).$$

С другой стороны, в фиксированный момент времени (пусть $t = 0$) мы получим такой профиль волны:

$$\xi(x,t)\big|_{t=0} = \left[\xi_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \xi_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right]\Big|_{t=0} = \\ = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) \cos(kx).$$

В этом выражении $\Delta k = k_1 - k_2 \ll k = (k_1 + k_2)/2$, k - среднее значение волнового числа. Обратите внимание на сходство выражения, описывающее профиль нашей волны, и выражения, которое описывает процесс биений.

Для произвольных значений времени и координаты мы получим такое выражение:

$$\xi(x,t) = \underline{2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right)} \cos(\omega t - kx).$$

В общем то, мы просто занимались некоторыми тригонометрическими преобразованиями. Но получили весьма любопытный и очень важный результат. Хотя его важность обнаружится еще нескоро.

Зададимся вновь вопросом: чему равна скорость распространения волны? Оказывается, ответ на этот вопрос неоднозначен. Для синусоидальной волны это скорость движения точки с постоянной фазой:

$$\omega t - kx = const; \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

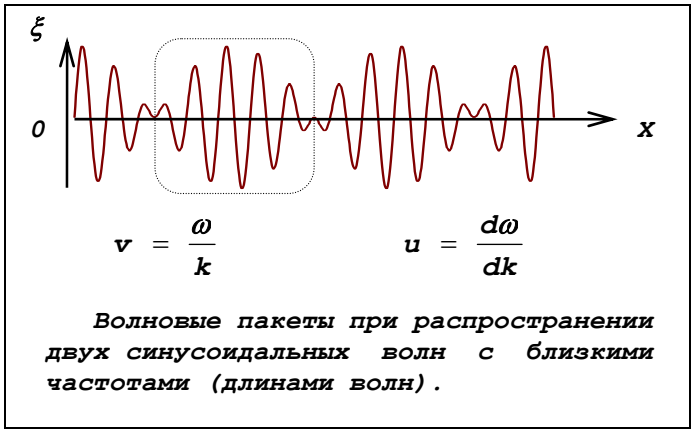
Это так называемая фазовая скорость. Но предположим, мы хотим измерить скорость распространения волны. Вообще говоря, для этого создается некоторый импульс (группа волн, волновой пакет, цуг) и измеряется время прохождения им некоторого расстояния. Но тогда мы определим скорость волны как скорость перемещения не точки с постоянной фазой, а точки с постоянной амплитудой (подчеркнутая группа сомножителей в выписанном выражении):

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x = const; \qquad u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk}.$$

Посмотрим когда и почему эти скорости оказываются различными.

Продифференцируем фазовую скорость, например, по волновому числу k:

$$\frac{dv}{dk} = \frac{d}{dk}\frac{\omega}{k} = -\frac{\omega}{k^2} + \frac{1}{k}\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{k}\left(-\frac{\omega}{k} + \frac{d\omega}{dk}\right) = \frac{1}{k}\left(-v + u\right).$$



Волновые пакеты при распространении двух синусоидальных волн с близкими частотами (длинами волн).

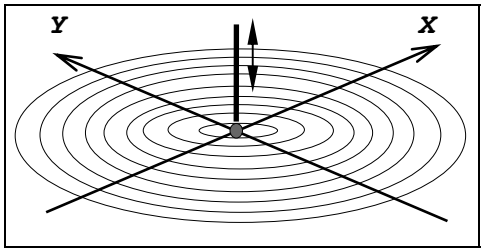
Таким образом, фазовая и групповая скорости различаются, если первая зависит от волнового числа (производная dv/dk отлична от нуля), а поскольку длина волны $\lambda = 2\pi/k$, можно сказать и иначе: эти скорости различны, если фазовая скорость зависит от длины волны. А если бы мы произвели дифференцирование по частоте, мы бы говорили о зависимости фазовой скорости от этой последней как об условии несовпадения фазовой и групповой скоростей.

Собственно, при гидролокации, радиолокации и проч. мы имеем дело именно с групповой скоростью, мы измеряем именно групповую, а не фазовую скорость, так что это очень важное понятие.

Подведем некоторый итог этой части разговора о волнах. Если наблюдается сумма колебаний различных частот, то обнаруживается изменение амплитуды во времени. Справедливо и обратное утверждение: если амплитуда колебаний непостоянна, значит мы имеем дело с суммой нескольких колебаний. Применительно к волне это означает, что при распространении некоторого волнового импульса мы наблюдаем распространение нескольких волн, некоторой их группы. Скорость распространения импульса потому и называется групповой. Количество синусоидальных волн, образующих импульс (волновой пакет, группу волн, цуг) может быть как конечным (минимум - две), так и бесконечным.

Заметим еще, что фазовая скорость может оказаться больше скорости света в вакууме, что невозможно для групповой скорости. При определенных условиях эти скорости вообще могут быть разного знака.

3.2. Точечный источник волн



Итак, чтобы получить круговые волны на поверхности воды нам необходимо создать некоторое возмущение в точке, которая будет центром кругов, образованных фронтами. Чтобы эта волна имела определенную (единственную) частоту необходимо непрерывное (периодическое) возмущение. Его можно осуществить с помощью колеблющегося в вертикальном направлении закрепленного на стержне

шарика подходящих размеров. Вообще говоря, такая волна все-таки не будет синусоидальной - ее амплитуда будет обратно пропорциональной корню квадратному из расстояния до начала координат, как это следует из закона сохранения энергии. Обратите внимание на очевидное, но весьма важное для дальнейшего обстоятельство: причиной возникновения волны является не само движение шарика, а периодическое возмущение поверхности воды в точке возникновения волны.

Волны на поверхности воды, стоячие волны при колебаниях струны весьма наглядны и разговор о волнах традиционно начинается с этих волн. Но намного важнее для нас другие волны, например, электромагнитные (световые). Непосредственно увидеть их нельзя (несмотря на то, что видим мы именно свет), но для понимания и/или обсчета некоторых оптических явлений важно хорошо представлять себе волны "вообще" независимо от их природы. И поняв нечто применительно к волнам на поверхности воды, мы с большей вероятностью сознательно, а не формально-математически сможем говорить о волнах другой природы.

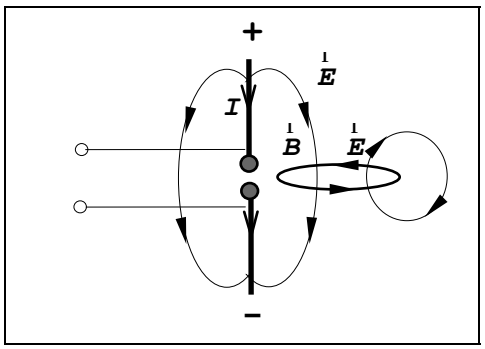
При каких условиях может возникнуть электромагнитная волна? Электромагнитное излучение пропорционально ускорению заряда. Если ускорение, например, направлено вдоль оси ***OZ***, электрическое поле на перпендикулярной к оси прямой на расстоянии r пропорционально этому ускорению. Соответствующее выражение имеет вид:

$$E_Z(r,t) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\, a_Z\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

Доказательство справедливости этого выражения достаточно сложно, и мы заниматься этим не будем. А выписано оно здесь прежде всего для того, чтобы можно было обсудить одно весьма важное обстоятельство.

Прежде всего важно, что множитель при ускорении a_Z обратно пропорционально расстоянию r. Это согласуется с выписанным нами ранее выражением для амплитуды сферической волны. Это обеспечивает выполнение закона сохранения энергии. Но особенно любопытна зависимость от времени.

Нас, естественно, интересует значение напряженности электрического поля в определенной точке в определенный момент времени $E_Z(r,t)$. Но определяется это значение ускорением в некоторый другой, более ранний момент времени $t - r/c$. Обусловлено это временной задержкой вызванного ускоренным движением заряда возмущения, связанной с конечностью скорости распространения света c. Эта задержка $\Delta t = r/c$.



При изучении возникновения и распространения электромагнитных волн большую роль сыграл вибратор (или диполь) Герца. Он представляет собой два стержня с шариками на концах, стержни подключаются к индукционной катушке - источнику высокого напряжения. Когда напряжение между стержнями становится достаточно большим, между шариками проскакивает искра. И существенно, что вольтамперная характеристика искрового разряда имеет отрицательное дифференциальное сопротивление.

Мы с Вами рассматривали задачу о возникновении колебаний в ***LC*** - контуре при включении в него элемента с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Вибратор Герца можно рассматривать как коле-

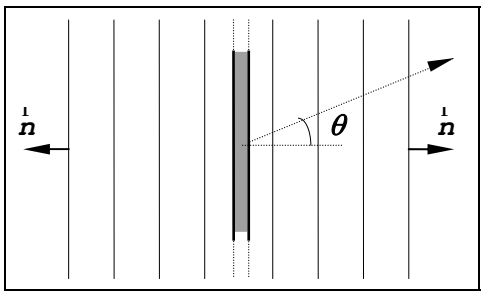
бательный контур, "открытый" колебательный контур. Емкостью в таком контуре является емкость между стержнями, преимущественно между их концами, на которых и накапливаются заряды при колебаниях. Сами стержни обладают индуктивностью. Контур называется открытым, поскольку в отличии от "обычного" конденсатора его поле не локализовано в ограниченном пластинами конденсатора объеме, а в окружающем стержни пространстве.

При колебаниях, разумеется, в стержнях происходит ускоренное движение зарядов (электронов), с их движением можно, разумеется, связать электромагнитное излучение. Но понятней представляется такое объяснение. В окружающем вибратор пространстве возникает переменное электрическое поле. В результате возникает изменяющееся во времени вихревое магнитное поле, оно вновь рождает также вихревое электрическое поле и т.д. Возникает электромагнитная волна.

Длина стержня примерно равна четверти длины волны, длина обоих стержней - $\lambda/2$. Вспомним, что при такой некоторой длине струны на ней укладывается также половина длины волны. Удивительное, но не случайное совпадение.

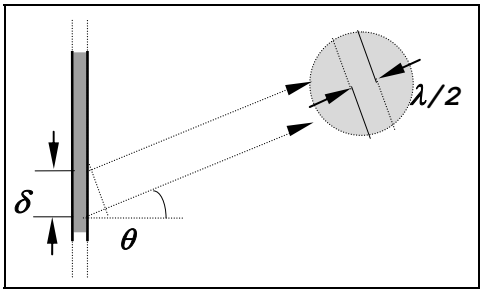
3.3. Множество точечных источников

Предположим, что волны на поверхности воды возбуждаются колебаниями длинного стержня. Стержень параллелен поверхности воды и совершает колебания в вертикальном направлении. На расстояниях меньше длины стержня в таких условиях будут наблюдаться плоские волны.



Стержень можно представить себе как совокупность тесно друг к другу, непрерывно расположенных точечных источников волны, заменить, например, большим количеством прижатых друг к другу шариков. Вид возникающей при этом волны не изменится, но появляется возможность провести важные рассуждения.

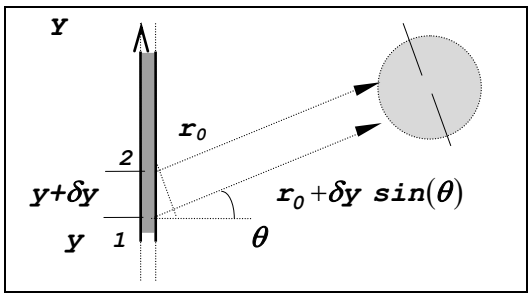
Множество точечных источников создает, естественно, множество круговых волн. Как мы видим, при тесном расположении источников получается плоская волна. Каким образом?



При распространении плоской волны происходит движение энергии в направлении нормали к фронту. Поэтому ответ на вопрос, почему волна плоская, заключается в ответе на вопрос, почему энергия не распространяется в каком-то ином направлении, составляющем угол θ с нормалью к оси стержня. Ответом на этот вопрос мы сейчас и займемся.

Если у нас имеется множество непрерывно расположенных точечных источников (круговых) волн, мы всегда можем выбрать пару источников, расположенных на некотором нужном нам расстоянии друг от друга. Выберем пару источников на таком расстоянии δ, чтобы выполнялось условие $\delta \sin(\theta) = \lambda/2$. Далее, на достаточно большом расстоянии от источников малый участок фронта круговой волны можно считать плоским, как это показано на рисунке. И расстояние между гребнями волн двух источников, относящихся к одному моменту времени излуче-

ния, будет равно $\lambda/2$. Это означает, что в выделенной области вызванные двумя нашими точечными источниками колебания происходят в противофазе. Амплитуды колебаний примерно одинаковые и при их сложении мы получим нуль. В этом направлении энергия распространяться не будет.



Предположим теперь, что фазы колебаний точечных источников цилиндрических или кольцевых волн неодинаковы, изменяются вдоль стержня, являясь функцией координаты $\varphi(y)$. Запишем условие равенства фаз колебаний, приходящих с волной из точек **1** и **2** в удаленную зону наблюдения:

$$\xi_1 = \xi_0\ cos\Big(\omega t - k\big(r_0+\delta y\ sin(\theta)\big)+\varphi(y)\Big);\qquad \xi_2 = \xi_0\ cos\Big(\omega t - kr_0+\varphi\big(y+\delta y\big)\Big);$$

$$-k\big(r_0+\delta y\ sin(\theta)\big)+\ \varphi(y) = -kr_0+\varphi\big(y+\delta y\big);$$

$$\frac{\varphi\big(y+\delta y\big)-\varphi(y)}{\delta y} = -k\ sin(\theta) = -\frac{2\pi}{\lambda}\ sin(\theta);$$

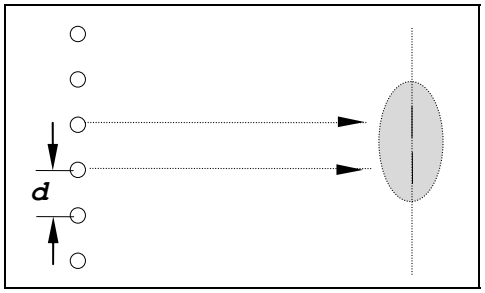
$$\boxed{sin(\theta) = -\frac{d\varphi}{dy}\frac{\lambda}{2\pi}.}$$

Стало быть, при изменяющейся вдоль оси **OY** фазе колебаний $\varphi(y)$ излучение будет распространяться в направлении под углом θ, определяемым выписанным условием. Естественно, при неизменной фазе $d\varphi/dy = 0$ и излучение направлено по нормали - в этом случае $\theta = 0$.

Лекция 3

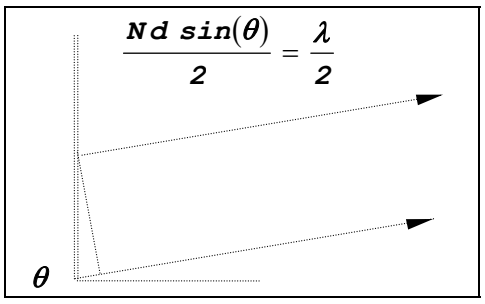
3.4. Периодически расположенные точечные источники волн

Рассмотрим интересный и весьма важный для практики случай, когда точечные источники волн расположены в виде цепочки. Пусть расстояние между источниками d составляет несколько длин волн и разность фаз колебаний равна нулю.



Применим ту же технику рассуждений, что и для случая тесного (непрерывного) расположения точечных источников. Рассмотрим сначала нормальное к цепочке направление.

На достаточно большом удалении от источников узкий (несколько расстояний между источниками) участок фронта кольцевой волны можно считать плоским (прямолинейным). Колебания от отдельных источников, расстояния до которых примерно одинаковы, будут происходить в выделенной области наблюдения в фазе, усиливая друг друга. В этом направлении будет распространяться плоская волна.



Но есть направления, в которых распространения волны происходить не будет. Попробует догадаться, каким может быть такое направление.

Будем постепенно увеличивать угол θ. При этом в достаточно удаленной от цепочки источников области наблюдения станет нарастать разность фаз колебаний, вызванных разными источниками. Пусть при некотором значении угла θ будет выполняться условие

$$\frac{Nd\sin(\theta)}{2} = \frac{\lambda}{2}; \qquad \sin(\theta) = \frac{\lambda}{Nd},$$

где N - количество источников в цепочке. Если расстояние между источниками d порядка нескольких λ и количество источников велико (например, более ста), значение угла θ будет очень маленьким. На рисунке этот угол показан достаточно большим, правдоподобно маленьким изобразить его нам не удастся.

При этом условии колебания от первого источника волн и от источника с номером $N/2$ в области наблюдения будут происходить в противофазе, погасят друг друга. Колебания от второго источника будут погашены колебаниями от источника с номером $N/2+1$ и т.д. Следовательно, такая цепочка будет излучать волну в пределах чрезвычайно малого угла $\pm\theta$. Мы получим практически плоскую волну.

Однако, при выбранной нами величине расстояния d порядка нескольких длин волн это не будет единственным направлением распространения волны и, соответственно, потока энергии. Действительно, если выполняется условие

$$d\,\sin(\theta_k) = k\lambda\,,$$

где k - целое число, то колебания от отдельных источников в области наблюдения будут происходить с разностью фаз $2\pi k$, т.е. будут складываться, усиливать друг друга. В этих направлениях, как и в направлении нормали к линии расположения источников ($\theta = 0$), будет распространяться примерно плоская волна. Эти направления называют направлениями на главные максимумы k-того порядка.

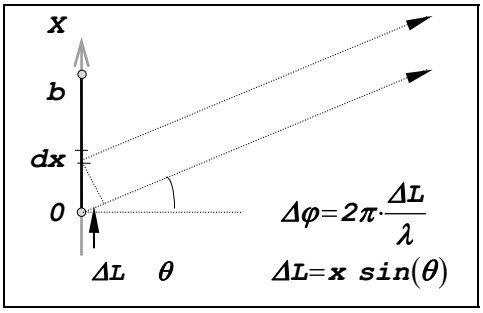
Большим значениям k соответствуют большие разности расстояний до области наблюдения. Естественно, эта разность (разность хода) не может стать больше чем d. Поэтому максимальное значение порядка максимума k определяется условием

$$k \le \frac{d}{\lambda}\,.$$

Для получения узкого пучка радиоизлучения используется антенна с расположенными в ряд дипольными излучателями. Если создать некоторую разность фаз колебаний соседних осцилляторов, направления главного максимума нулевого порядка будет отличаться от нормали (этот эффект мы обсуждали для тесного, непрерывного расположения точечных источников). Таким способом может быть осуществлено изменение направления радиоизлучения (сканирование) без поворота антенны.

3.5. Расчет углового распределения потока энергии от системы источников

3.5.1. Непрерывное распределение источников



В случае возбуждения волн на поверхности воды такое расположение точечных источников, колебания которых происходят в фазе, обеспечивается вертикальными колебаниями параллельного поверхности воды стержня. Рассмотрим излучение, вызванное колебаниями стержня конечной длины, равной b.

Положение точечного источника определяется его координатой x, амплитуда колебаний пропорциональна dx. Чтобы найти амплитуду колебаний в удаленной от стержня области наблюдения необходимо провести сложение колебаний от всех источников (интегрирование по отрезку $0b$):

$$\xi = \int_0^b \frac{\xi_0}{b}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x\,\sin(\theta)}{\lambda}\right) dx =$$

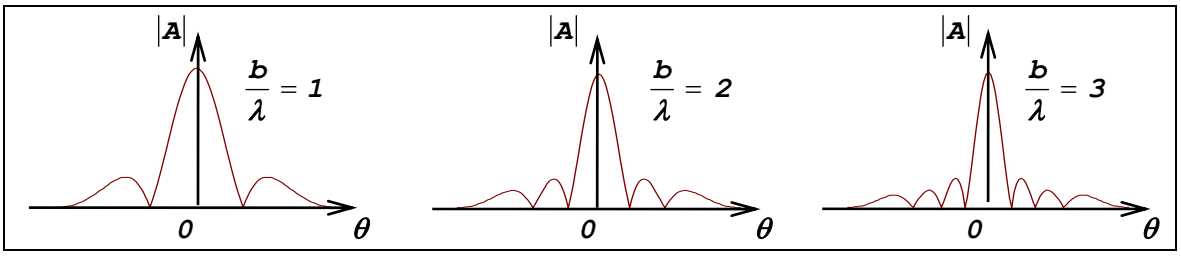
$$= \xi_0\,\frac{\lambda}{2\pi b\,\sin(\theta)}\int_0^{x=b}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi\,\sin(\theta)}{\lambda}\,x\right) d\left(\frac{2\pi\,\sin(\theta)}{\lambda}\,x\right) =$$

$$= \xi_0 \frac{-\lambda}{2\pi b \sin(\theta)} \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi \sin(\theta)}{\lambda} b \right) - \sin(\omega t) \right] =$$

$$= \xi_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda} \right).$$

У нас получилось довольно громоздкое "многоэтажное" выражение, в смысле которого нам надо разобраться. Во-первых, из этого выражения видно, что, как и должно было быть, в некоторой области (точке) наблюдения происходят колебания с частотой ω и некоторой начальной фазой. В выражение для амплитуды этих колебаний входит множитель ξ_0. В принципе, он может быть выражен через амплитуду колебаний вблизи стержня с помощью закона сохранения энергии. Но он не представляет для нас особого интереса, как и начальная фаза колебаний. Нужное же нам угловое распределение потока энергии определяется множителем

$$A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda} \right)}{\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}}.$$



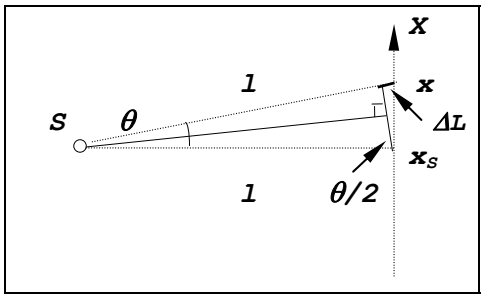
В числителе этого выражения стоит синус знаменателя. Поэтому, если знаменатель обращается в нуль при $\theta = 0$, будет $A = 1$. При изменении θ в пределах $\pm\pi/2$ величина $|A|$ периодически принимает нулевое значение и затем достигает максимумов. Величина модуля A в максимуме по мере увеличении модуля θ уменьшается, поскольку синус от некоторой величины изменяется медленнее, чем сама эта величина. Вид зависимости $|A(\theta)|$ при разных отношениях b/λ представлен на рисунке.

3.5.2. Излучение пары точечных источников

Ранее мы рассматривали суммарные колебания от системы точечных источников в некоторой достаточно удаленной области наблюдения. При этом мы не определяли, по сравнению с чем это удаление велико. Собственно, рассматривая параллельные лучи, мы неявно считали, что область наблюдения находится на бесконечности.

Рассмотрим теперь колебания от уединенного источника в точках плоскости, отстоящей от него на большое, но конечное расстояние l. При этом мы ограничимся небольшим по сравнению с l смещением точки

наблюдения от точки падения перпендикуляра, проведенного от источника волн S к плоскости, при малых значениях x.



Проведем от источника волн отрезок прямой в точку наблюдения с координатой x и перпендикуляр к оси координат. Величина x_S - это x-координата источника. Мы получили прямоугольный треугольник. Отложим от точки расположения источника вдоль гипотенузы треугольника отрезок длиной l и соединим конец этого отрезка с точкой x_S, точкой падения перпендикуляра. Угол при вершине построенного таким образом равнобедренного треугольника $\theta \approx (x-x_S)/l$, а основание составляет с осью $0X$ угол $\theta/2$. Таким образом, разность хода лучей

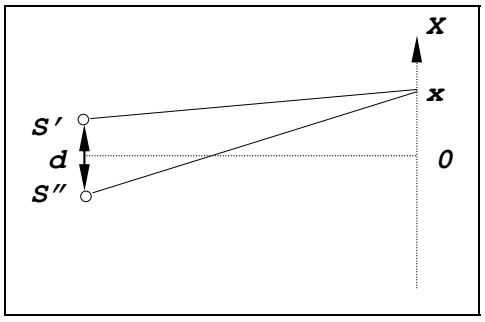
$$\Delta L \approx (x-x_S)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx (x-x_S)\frac{\theta}{2} \approx \frac{(x-x_S)^2}{2l}.$$

Соответственно, разность фаз колебаний в этих точках

$$\Delta\varphi(x) = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{\pi}{l\lambda}(x-x_S)^2.$$

В этом выражении $(x-x_S)$ - разность x-координат точки наблюдения и источника волн.

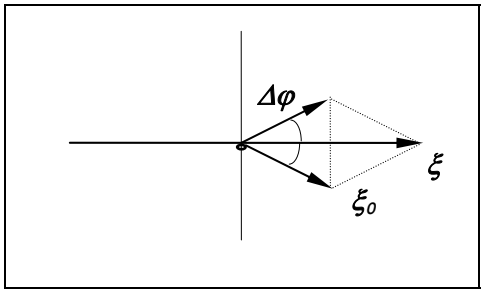
Полученное выражение является для нас вспомогательным. Применим его для решения задачи об амплитуде колебаний, созданных двумя точечными источниками, расположенными на расстоянии d друг от друга и на расстоянии l от плоскости наблюдения.



Разность фаз колебаний, созданных нашими источниками в точке x,

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{l\lambda}\left[(x+d/2)^2-(x-d/2)^2\right].$$

В круглых скобках записаны разности x-координат точки наблюдения и источников волн. После возведения в квадрат мы получаем:



$$\Delta\varphi = \pi\frac{2d}{l\lambda}x.$$

Произведем сложение этих колебаний с помощью векторной диаграммы. Фаза результирующих колебаний нас не интересует, а амплитуда

$$\xi_{0\Sigma} = 2\xi_0\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 2\xi_0\cos\left(\pi\frac{d}{l\lambda}x\right)$$

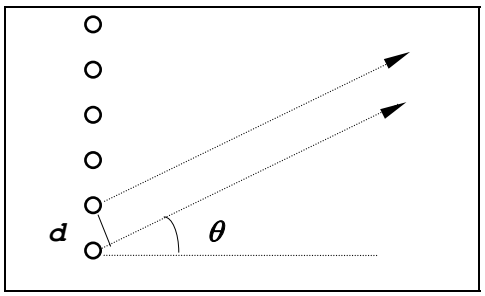
принимает максимальные значения $2\xi_0$ в точках, отстоящих друг от друга на

$$\Delta x = \frac{1\lambda}{d}$$

(при изменении аргумента косинуса на π). Центральный максимум наблюдается при $x = 0$.

3.5.3. Излучение цепочки периодически расположенных источников

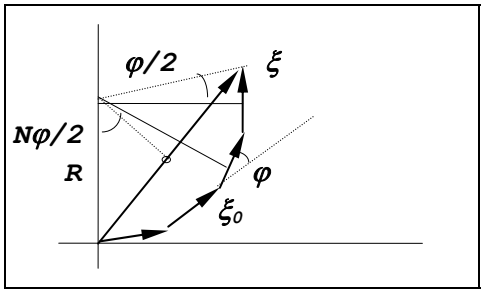
Пусть теперь у нас имеется N точечных источников волн, отстоящих один от другого на расстояние d порядка нескольких длин волн. В достаточно удаленной от цепочки источников области наблюдения вызванные соседними источниками колебания будут происходить с разностью фаз



$$\varphi = 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}.$$

На векторной диаграмме представляющие колебания от соседних источников векторы будут повернуты по отношению друг к другу на такой угол.

Эти векторы образуют ломаную, вписанную в окружность радиуса R. Если амплитуда колебаний от одного источника в области наблюдения равна ξ_0, то



$$R = \frac{\xi_0/2}{\sin(\varphi/2)}$$

и для амплитуды суммарных колебаний мы получаем выражение:

$$\xi_{0\Sigma} = 2R \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \xi_0 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}.$$

При $\theta = 0$ будет $\varphi = 0$ и $\xi_{0\Sigma} = N\xi_0$ - векторы расположены вдоль прямой, поскольку разность фаз колебаний от соседних источников равна нулю. Но при больших значениях N уже при малых θ (и, соответственно, φ) амплитуда суммарных колебаний обращается в нуль:

$$\frac{N\varphi}{2} = \pi; \qquad \varphi = \frac{2\pi}{N}.$$

Таким образом, в направлении $\varphi = 0$ будет распространяться практически плоская волна.

Но будут и другие направления распространения практически плоских волн. Для этих направлений должны выполняться условие

$$\varphi = 2\pi \frac{d \sin(\theta_k)}{\lambda} = 2\pi \cdot k; \qquad \Delta L = d \sin(\theta_k) = k\lambda$$ –

разность расстояний до некоторой (любой!) точки достаточно удаленной области наблюдения должна равняться целому числу длин волн. При такой разности хода векторы на фазовой диаграмме вновь выстроятся вдоль прямой.

Этот результат мы получили ранее, но теперь мы можем просто определить направления ближайших к данному максимуму k-того порядка минимумов. Для минимумов должны выполняться условия

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0; \qquad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0.$$

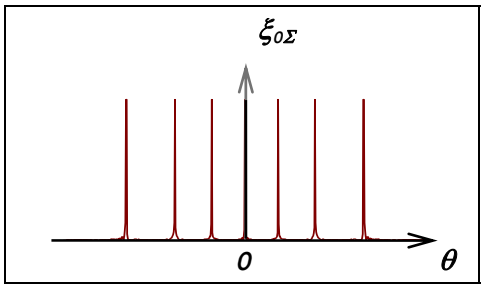
Эти выражения справедливы при

$$\frac{N\varphi}{2} = \frac{N}{2} 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda} = k'\pi; \qquad d \sin(\theta) = k'\lambda/N$$

(выполняется первое условие), причем $k' \neq 0, N, 2N \ldots$ (выполняется второе условие). При таких значениях k' разность хода от соседних источников равна целому числу волн:

$$d \sin(\theta) = k'\lambda/N = k\lambda, \quad k = 0,1,2 \ldots$$

и наблюдаются максимумы излучения.



На рисунке показана зависимость амплитуды колебаний от угла θ. Линии настолько узки и дополнительные максим столь малы, что их на рисунке не видно. Кривая получена для количества источников $N=200$ и отношения $d/\lambda=3,5$.

Обратите внимание: при увеличении модуля θ расстояние между линиями увеличивается. Это обстоятельство в дальнейшем будет для нас существенно.

Лекция 4

4. Законы геометрической оптики

4.1. Прямолинейность распространения света. Принцип Ферма

Физика в разных своих разделах часто занимается вопросами весьма несхожими. В частности оптика никак не представляется логическим продолжением предыдущих разделов, которыми мы с Вами занимались. И хотя свет представляет собой электромагнитную волну, разговором о которой мы закончили предыдущий раздел “Электричество и магнетизм”, вопросами электромагнитной природы света мы будем заниматься не слишком много, нас скорее будет интересовать собственно волновая природа света, а не то, что это волна *электромагнитная*.

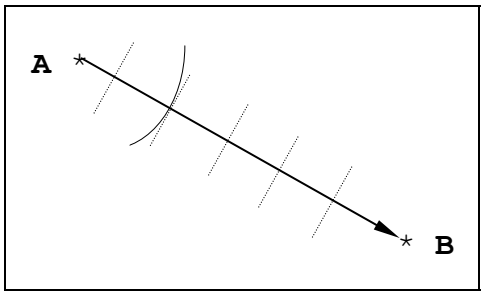
В свою очередь мы не станем подробно говорить об оптике геометрической. Но основные ее законы, видимо, обсудить необходимо. Первым из них является закон прямолинейности распространения света. Выглядит он чрезвычайно простым - между двумя точками свет распространяется вдоль прямой. И достаточно естественно возникает вопрос такого рода: “А как же иначе?”

Действительно, такой “способ” распространения света кажется более чем естественным. Но в дальнейшем возникнут достаточно серьезные трудности для понимания - когда мы встретимся с отклонениями от этого закона. Да и едва ли Вам часто приходилось наблюдать прямолинейное распространение волны - прямолинейность распространения и волновая природа, пожалуй, представляются скорее несовместимыми. Разве что такие два примера.

Примерно плоскими являются морские волны, рожденные ветром и пришедшие к нам с очень большого расстояния. Большое расстояние и плоский характер волны представляются неразрывно связанными. И еще такой пример. Возможно, в кинофильмах о войне Вам случалось обратить внимание на непривычную для современного взгляда форму “динамиков” (тогда они назывались репродукторами) - этакая плоская “тарелка”. В те времена еще не было создано мощных источников звука и достаточно хорошая слышимость достигалась за счет создания по возможности узко направленной в нужном направлении плоской звуковой волны, амплитуда колебаний которой слабо уменьшается с расстоянием.

Прежде всего следует подробнее поговорить о том, что именно мы понимаем под направлением или путем распространения света. Важным здесь оказывается понятие луча. Часто говорят, что, например, солнечный луч можно легко увидеть в слегка запыленном затемненном помещении, если свет проникает в него через небольшое отверстие. Или в тени дерева мы можем видеть отдельные солнечные “зайчики” - места падения лучей, прошедших через промежутки между листьями кроны дерева. Такой “наблюдаемый” луч оказывается прямолинейным и о его отражении и преломлении обычно идет речь при постановке экспериментов.

Но мы знаем, что свет имеет волновую природу и более строго лучем называется кривая (прямая в частном случае), проведенная перпендикулярно касательным к фронтам волны в разных точках. Это уже достаточно абстрактное понятие, то, что мы можем увидеть в слегка запыленной комнате, лишь приблизительно соответствует такому пониманию луча.



Итак, если нет никаких препятствий и среда однородна, то луч света прямолинеен. На рисунке мы соединяем точки A и B прямой и говорим, что свет распространяется вдоль этой прямой. Изображенные пунктирными отрезками касательные к фронтам волны перпендикулярны лучу. Сами фронты не обязательно плоские.

Заметим, что фронт волны образуют точки, в которых фазы колебаний одинаковы. (Вспомним также, что фазой называется аргумент гармонической функции.) Обычно рисуют линии пересечения плоскости рисунка фронтами, на которых достигается максимум амплитуды колебаний. В таком случае говорят о гребнях волн.

Вдоль прямой расстояние между двумя точками минимально. Оказывается, что и в других случаях, когда, например, имеется отражающая поверхность, путь распространения света оказывается таким, что вдоль него время движения волны минимально. Это утверждение называют принципом Ферма - в простейшей, можно сказать, первоначальной формулировке. Эту формулировку нам еще предстоит в дальнейшем уточнять.

4.2. Отражение света. Плоское зеркало

Отражение света происходит на границе сред с различными (фазовыми) скоростями распространения волны. Особый интерес представляет собой граница металл - вакуум. Внутри металла распространение света, вообще говоря, невозможно.

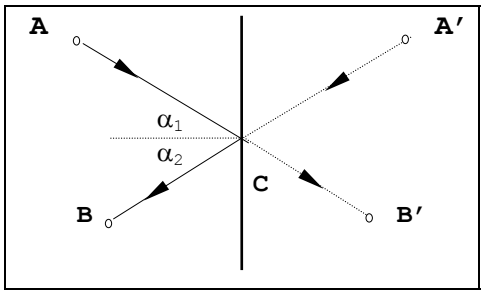
Рассмотрим процесс отражения света от зеркальной металлической поверхности подробнее.

Сложности при анализе оптических явлений возникают из-за сложности самих процессов. По мере углубления их анализа нам будет необходимо учитывать все больше разного рода тонкостей и особенностей. К таковым относится, например, поляризация света.

Мы говорили, что электромагнитная (световая) волна называется поперечной - в ней колеблющееся электрическое поле направлено перпендикулярно лучу, перпендикулярно направлению распространения света. При этом возникает достаточно много разных возможностей изменения направления вектора электрического поля вдоль луча света, типов поляризации. Простейшим является случай линейно или плоско поляризованного света, когда направление вектора $\vec{E}$ в некоторой точке или вдоль направления распространения остается неизменным. Им мы пока и ограничимся. Более того, будем считать вектор $\vec{E}$ направленным перпендикулярно плоскости чертежа, параллельно поверхности зеркала. В этом случае (согласно граничным условиям для вектора электрического поля) вблизи зеркальной поверхности $\vec{E}$ равно нулю, что существенно упрощает наши рассуждения. А рассуждения наши будут такими.

В направлении от точки **A** к точке **B′** распространяется электромагнитная волна, встречающая на своем пути металлическое зеркало. Под действием электрического поля в металле возникает ускоренное (колебательное) движение электронов, и в результате возникает вторичное излучение. Результирующая волна (или волны) есть результат сложения (суперпозиция) волны, пришедшей от точки **A**, и волны, которая излучается электронами зеркала. Эта последняя такова, что спра-

ва от зеркала электрическое поле равно нулю - колебания этих двух волн противоположны по фазе, они "гасят" друг друга.



Вспомним результат, который мы получили для излучения цепочки непрерывно расположенных точечных источников - при линейном изменении фазы колебаний вдоль цепочки излучение происходит под некоторым отличном от $\pi/2$ направлении. При "косом" падении волны на поверхность зеркала фаза колебаний электронов, естественно, изменяется от точки к точке - расстояния от источника света до этих точек различны. Поэтому и вторичная волна, излучаемая колеблющимися электронами, направлена под некоторым углом к норамали к поверхности зеркала. И именно под тем, под которым она на него падает.

Можно быть уверенными, что справа и слева от зеркала излучение колеблющихся электронов симметричны. Излучаемая вправо волна гасит исходную волну, а излучаемая влево как раз и является волной отраженной. Как мы видели, фаза этой волны должна быть противоположна фазе волны падающей.

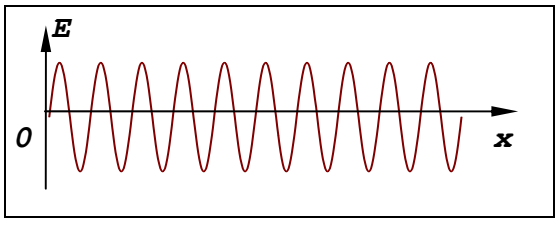
Волну, идентичную отраженной, мы могли бы получить поместив в точку ***A′*** такой же источник света как в ***A***, но излучающий волну с противоположной фазой. И этом случае в плоскости зеркала (в плоскости симметрии) напряженность электрического поля равна нулю - такие волны "гасят" друг друга в плоскости симметрии, в плоскости зеркала. Амплитуда электромагнитных колебаний равна нулю.

При взаимодействии электромагнитной волны с веществом с этим последним взаимодействует именно электрическое, а не магнитное поле. Поэтому, если из точки ***A′*** происходит излучение волны с противоположной фазой и мы просто уберем зеркало, картина колебаний не изменится.

В связи с изменением фазы колебаний при отражении от зеркала на π вводится новый для нас термин - "*потеря полуволны*". Он будет достаточно понятен, если вспомнить, что при распространении волны в отстоящих на $\lambda/2$ точках колебания происходят в противофазе.

Закон отражения утверждает, что при отражении света луч падающий, луч отраженный и перпендикуляр к поверхности зеркала в точке отражения лежат в одной плоскости. При этом угол падения равен углу отражения - $\alpha_1 = \alpha_2$. Этот закон можно считать следствием принципа Ферма: длина ломаной ***ACB***, равная длине отрезка ***A′B***, представляет собой минимальный путь между точками ***A*** и ***B*** для распространения света с отражением от зеркала. При смещении точки отражения ***C*** вверх или вниз длина пути увеличивается.

4.3. Сложение гармонических колебаний

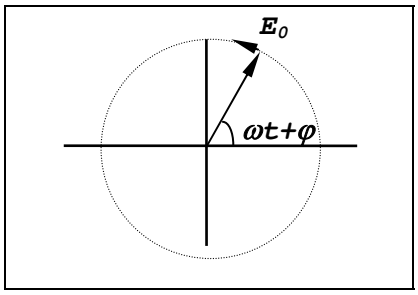


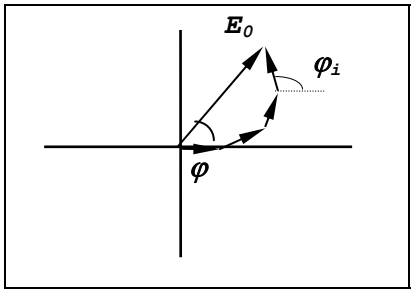
Из всех разнообразных видов волн мы ограничиваемся здесь лишь волнами, которые представляют собой процесс распространения *гармонических* или *почти гармонических* колебаний. Нам придется достаточно много заниматься сложением большого числа ко-

лебаний и потому представляется полезным еще раз вспомнить о сущности используемого метода - метода векторных диаграмм.

Сначала посмотрим, как могут быть представлены или описаны волновой процесс и происходящие при этом колебания.

На рисунке представлен график зависимости напряженности электрического поля световой волны от координаты. Естественно, это график зависимости $E(x)$ в некоторый момент времени. Эту картинку следует представлять себе движущейся со скоростью света вдоль оси OX. Если по оси абсцисс будет отложено времени, тот же график будет представлять собой колебания электрического поля в некоторой точке.





Такие способы представления волны достаточно наглядны, но неудобны для сложения колебаний или волн. Для этих целей часто используется представление колебаний в виде векторной диаграммы.

Предположим, что в некоторой точке происходят колебания по закону $E = E_0\cos(\omega t+\varphi)$. Эти колебания можно представить таким способом.

Нарисуем некий вспомогательный вектор длины E_0 таким образом, чтобы его угол с осью абсцисс при $t=0$ был равен φ. Если мы теперь будем вращать вектор с угловой скоростью ω, его проекция на ось абсцисс будет равна $E_0\cos(\omega t+\varphi)$, т.е. будет представлять собой наше колебание.

Предположим теперь, что в некоторой точке происходит несколько колебаний вида $E_i=E_{0i}\cos(\omega t+\varphi_i)$. Для прямого нахождения их суммы нужно решить достаточно сложную тригонометрическую задачу. Но векторная диаграмма позволяет достаточно просто решить эту проблему геометрически.

Для этого достаточно нарисовать векторы длиной E_{0i} так, как это показано на рисунке. Легко найти сумму этих векторов - обозначим длину суммарного вектора E_0, его угол с осью абсцисс в начальный момент времени φ. Поскольку *проекция суммы векторов равна сумме их проекций*, при вращении суммарного вектора со скоростью ω его проекция на ось абсцисс будет представлять собой сумму колебаний E_i.

При практическом использовании векторной диаграммы обычно "забывают" о том, что вектора вращаются: определив длину суммарного вектора E_0 и начальную фазу φ, можно записать выражение для суммарных колебаний:

$$\sum E_{0i}\cos\left(\omega t+\varphi_i\right) = E_0\cos\left(\omega t+\varphi\right).$$

Таким образом, тригонометрическая задача сводится к задаче геометрической, которая обычно оказывается проще, а результат - более наглядным.

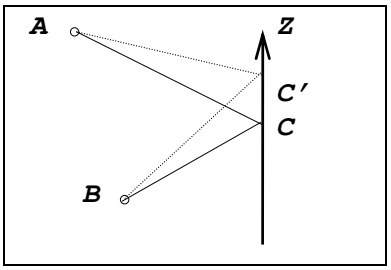
Но то обстоятельство, что этот вектор вращается, в некоторых задачах неожиданно становится существенным и приходится вспоминать об этом вращении.

Применим этот метод для анализа отражения волны от плоского зеркала. Предположим, что в точке A находится некоторый источник света. В разных точках зеркала (C и C', например) колебания электронов будут происходить с разными начальными фазами. С разными

фазами будут происходить и колебания электрического поля в точке ***B***, вызванные колебаниями расположенных в разных точках электронов.

Разность фаз этих колебаний определяется разностью длин ломаных ***ACB*** и ***AC′B***. Обозначим их как ***L*** и ***L′***. Тогда разность фаз колебаний

$$\Delta\varphi = -\omega\frac{L'-L}{c} = -\frac{\omega\Delta L}{c} = -\omega\Delta t\,.$$

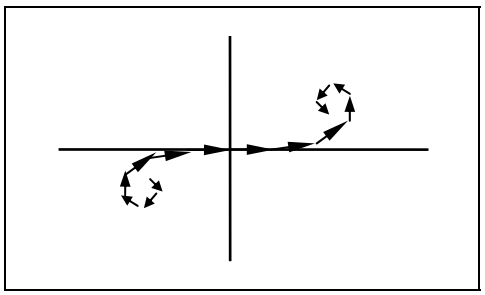


Здесь ***c*** - скорость света, ***Δt*** - разность времен распространения света вдоль ломаных ***AC′B*** и ***ACB***, время запаздывания одного сигнала по отношению к другому. Появление знака "минус" связано с тем, что вдоль ломаной ***AC′B*** волна проходит большее расстояние, в сложении участвуют колебания волны, излученной в более ранний момент времени.

Длина ломаной ***ACB*** минимальна. Поэтому при прохождении луча через эту точку

$$\frac{dt}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = 0\,.$$

Это означает, что при малом смещении от точеи ***C*** вверх или вниз фаза колебаний в точке ***B*** из-за колебаний отдельных электронов остается примерно одинаковой, амплитуды соответствующих колебаний складываются. Но при отклонении точки от положения ***z = 0*** (точки ***C***) производная ***dt/dz*** и, стало быть, ***dφ/dz*** будет возрастать по модулю и "скорость" изменения (модуль производной) будет тем больше, чем сильнее отличается значение координаты ***z*** от нуля. На векторной диаграмме это проявляться в быстром изменении разности фаз колебаний (в точке ***B***), вызванных даже близко друг другу расположенных электронов. Соответствующие векторы $\boldsymbol{E_{0i}}$ на диаграмме поворачиваются и при больших значениях ***z*** собираются в тесный "клубок", т.е. дают все меньший вклад в суммарное колебание напряженности электрического поля в точке ***B***.



Так вот, при рисовании векторной диаграммы необходимо решить, в какую сторону поворачивать векторы, отвечающие опережающим по фазе колебаниям. Иначе говоря, выбрать положительное направление отсчета угла, и тем самым - направление вращения вектора.

В механике и электричестве за положительное направления отсчета угла принимается направление против часовой стрелки. Но в оптике традиционно за положительное направление выбирается противоположное направление, по часовой стрелке. Это изменяет вид векторной диаграммы и будет существенно при решении некоторых задач.

В этой связи полезно запомнить такое простое правило для рисования векторных диаграмм: если путь распространения света *больше*, то соответствующий вектор на диаграмме оказывается повернутым на некоторый угол *против часовой стрелки*.

Произведем некоторые оценки для конкретного взаимного расположения зеркала, источника света **A** и точки наблюдения **B**. Будем считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 45^0$, а координаты точек $z_A = 20$ **см**, и $z_B = -15$ **см**. Нас будет интересовать, при каком смещении точки **C** фаза электромагнитных колебаний в точке **B** изменится на $\pi/2$.

При такой геометрии длина пути распространения света

$$L = z_A\sqrt{2} + z_B\sqrt{2} \approx 50 \text{ см}$$

и

$$L' = \sqrt{z_A^2 + (z_A - z)^2} + \sqrt{z_B^2 + (z_B + z)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\left(z_A\sqrt{1 + \left(-\frac{z}{z_A} + \frac{z^2}{2z_A^2}\right)} + z_B\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_B} + \frac{z^2}{2z_B^2}\right)}\right) \approx$$

$$\approx L + \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{z_A} + \frac{1}{z_B}\right).$$

Изменение фазы колебаний на $\pi/2$ (и, соответственно, поворот вектора на фазовой диаграмме на такой угол) отвечает разности путей распространения света $\lambda/4$. Приняв длину волны $\lambda = 0{,}5$ **мкм**, мы получаем:

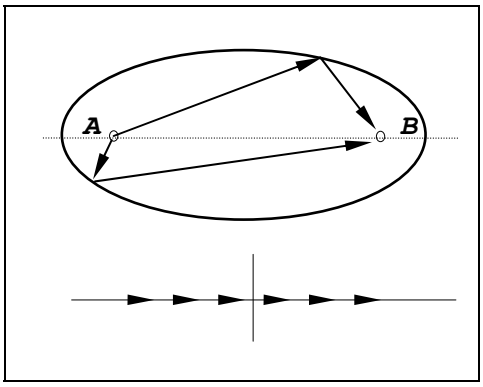
$$L' - L = \frac{\lambda}{4} = \frac{z^2}{4}\left(\frac{1}{z_A} + \frac{1}{z_B}\right);$$

$$z = \sqrt{\frac{\lambda z_A z_B}{z_A + z_B}} = \sqrt{\frac{0{,}5\cdot10^{-6}\cdot20\cdot15\cdot10^{-4}}{35\cdot10^{-2}}} \approx 2\cdot10^{-4} \text{ м}.$$

Таким образом, согласно нашей оценке заметный вклад в электромагнитные колебания в точке **B** дают лишь колебания электронов, расположенных на расстояниях меньше $\pm 0{,}2$ **мм** в окрестности точки **C**.

Лекция 5

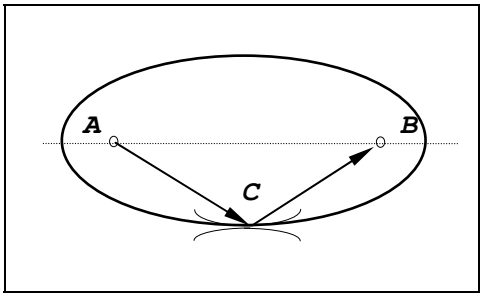
4.4. Эллиптическое зеркало. Уточненная формулировка принципа Ферма



Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до некоторых двух точек (фокусов эллипса) постоянна. Благодаря этому зеркало, сечение которого представляет собой эллипс, оказывается исключительно интересным. При отражении от такого зеркала каждый луч, вышедший из фокуса ***A*** после отражения попадает в фокус ***B***.

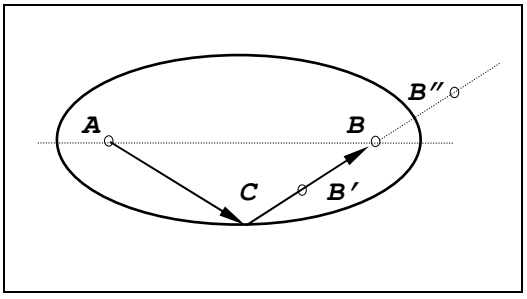
Мы рассматривали отражение от плоского зеркала, тогда путь распространения был минимальным. В случае эллиптического зеркала все пути распространения света одинаковы. Как и в случае плоского зеркала, отраженная волна представляет собой результат излучения колеблющихся электронов, колебания которых вызвала падающая волна Будем считать, что источник волн, излучатель находится в точке ***A***. Но теперь вызванные движением разных электронов электромагнитные колебания в точке ***B*** будут происходить с одинаковыми фазами. Векторная диаграмма будет выглядеть иначе - отдельные векторы *не будут* повернуты один по отношению к другому, будут лежать на одной прямой.

Естественно, при таком отражении для каждого луча также будет справедлив закон отражения.



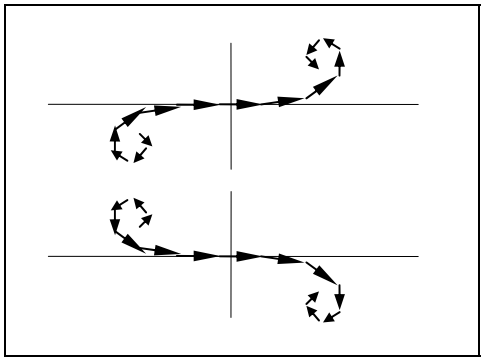
Если кривизна зеркала в точке отражения будет больше кривизны эллиптического зеркала, длина пути распространения (длина ломаной ***ACB***) будет не минимальной, а максимальной. Но отражение в точке ***C*** будет происходить так же, как от эллиптического зеркала. Это вынуждает нас уточнить формулировку принципа Ферма: для пути распространения света определяющей оказывается не минимальность, а экстремальность этого пути. Или же длина пути не должна изменяться при смещении точки отражения.

В этой связи можно провести такие более доказательные рассуждения.



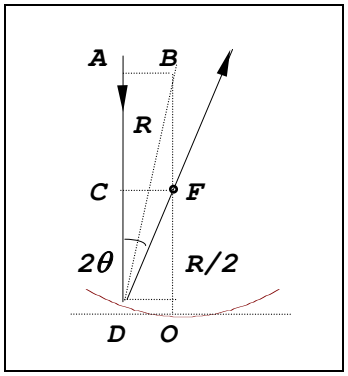
Луч ***CB*** проходит также через точки ***B′*** и ***B″***. И если длины разных лучей, приходящих из точки ***A*** в точку ***B*** одинаковы, такого утверждения нельзя сделать для точек ***B′*** и ***B″***. Соответственно, и векторные диаграммы для сложения колебаний от отдельных электронов в этих точках будут выглядеть иначе - эти векторы не будут выстраиваться по одной прямой, станут скручиваться в "клубки". Попробуйте самостоя-

тельно разобраться, какая из приведенных на рисунке диаграмм относится к точке ***B′***, а какая к точке ***B″***.



Если Вам понятен смысл векторных диаграмм, Вы поймете и то, что такое различие их вида означает весьма существенное различие амплитуд колебаний в точке ***B*** (амплитуда велика) и точках ***B′*** и ***B″*** с другой стороны. Говорят, что свет "фокусируется" в точке ***B***, в этой точке находится изображение источника света ***A***.

4.5. Сферическое зеркало



Свойством сферического зеркала является то, что после отражения от него лучи собираются в некоторой точке, называемой фокусом зеркала.

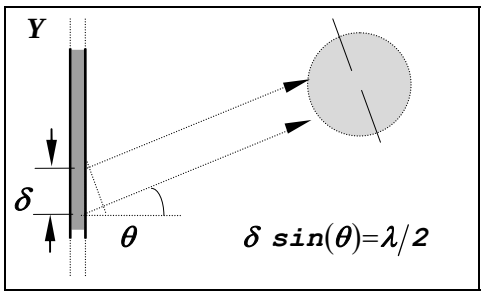
Рассмотрим падение плоской волны на сферическое зеркало радиуса ***R***. При этом мы ограничимся рассмотрением отражения параксиальных лучей, расстояние которых от оптической оси на малое расстояние, равное длине отрезка ***AB << R***. В этом приближении угол падения θ можно считать малым.

После отражения луч пересечет оптическую ось в некоторой точке ***F***. При малых θ будут справедливы выражения:

$$AB \approx R\cdot\theta\,; \qquad AB = CF \approx CD\cdot(2\theta) = OF\cdot(2\theta)\,,$$

из которых следует, что фокусное расстояние зеркала ***OF*** равно половине радиуса.

Собственно, мы решили задачу о сферическом зеркале. Но более важной задачей для нас является детальное знакомство с процессами излучения, распространения волн. Поэтому поговорим о процесс фокусировки подробнее.

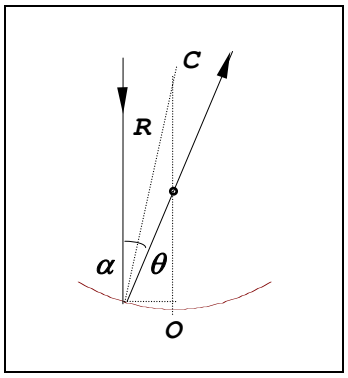


Ранее мы получили связь между характером изменения фазы колебаний непрерывно расположенных точечных источников при переходе от точки к точке и направлением излучения θ:

$$\sin(\theta) = -\frac{d\varphi}{dy}\frac{\lambda}{2\pi}\,.$$

При малых значениях θ будет:

$$\theta \approx -\frac{d\varphi}{dy}\frac{\lambda}{2\pi}\,.$$



Применим это выражение к случаю отражения плоской волны от сферического зеркала. Обозначим на этот раз угол падения через α и вместо дифференцирования по y нам нужно будет провести дифференцирование фазы по расстоянию $x(\alpha)$ от точки O.

Почему при переходе от точки к точке вдоль поверхности зеркала изменяется фаза вызванных волной колебаний электронов? Видно, что чем дальше точка падения от центра зеркала, тем меньше путь луча, попадающего в эту точку. Если разность хода равна ΔL, то для подсчета разности фаз необходимо разделить эту величину на λ и умножить на 2π. Таким образом (по модулю),

$$\Delta L = R\left(1 - \cos(\alpha)\right) \approx R\,\frac{\alpha^2}{2}; \qquad \varphi = 2\pi\,\frac{R\alpha^2}{2}.$$

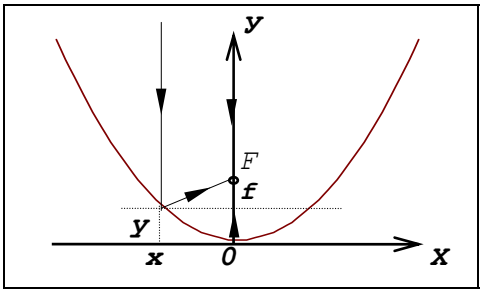
Теперь мы можем найти зависимость угла направления излучения (по отношению к нормали, радиусу) от угла α:

$$x(\alpha) = R\sin(\alpha) \approx R\cdot\alpha; \qquad \theta = \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{\lambda}{2\pi} \approx \frac{d\varphi}{Rd\alpha}\,\frac{\lambda}{2\pi} = \alpha.$$

Мы не получили нового результата. Как и должно быть, в чем мы убедились еще раз, угол отражения θ равен углу падения α. Но для нас важно, что этот результат для отражения от сферического зеркала может быть получен и с помощью анализа зависимости фазы колебаний электронов, излучающих вторичную, отраженную волну, от x - расстояния от точки падения луча до оптической оси OC.

4.6. Параболическое зеркало

При отражении от сферического зеркала происходит фокусировка только параксиальных лучей. Попробуем теперь найти такое сечение зеркала, чтобы в его фокусе собирались все лучи независимо от расстояния до оптической оси.



Для определения вида сечения зеркала воспользуемся принципов ферма.

Пусть соответствующая кривая описывается функцией $y(x)$, координаты точки падения x и y. Обозначим буквой F фокус зеркала, его координата (фокусное расстояние) - f.

От точки падения луч пройдет до фокуса расстояние

$$L = \sqrt{(f-y)^2 + x^2}.$$

Чтобы у всех параллельных лучей была одинаковая длина пути, необходимо чтобы выполнялось условие

$$L = f + y \quad -$$

после пересечения с горизонтальной пунктирной линии до фокуса совпадающий с оптической осью луч пройдет сначала путь y до точки отражения и затем - f в обратном направлении. Этот путь должен быть равен L, Только в этом случае все лучи соберутся в фокусе зеркала.

Таким образом, мы получаем:

$$\sqrt{(f-y)^2 + x^2} = f + y;$$

$$f^2 - 2fy + y^2 + x^2 = f^2 + 2fy + y^2;$$

$$y = \frac{x^2}{4f}.$$

Это парабола и, значит, необходимым нам свойством обладает параболическое зеркало.

4.7. Закон преломления света

4.7.1. Скорость света в веществе

Мы с Вами убедились в свое время, что из уравнений Максвелла следует волновое уравнение. Электромагнитные волны с длиной волны примерно в пределах $0{,}4 \div 0{,}7$ *мкм*, воспринимаемые глазом, называют светом. И среди множества веществ есть такие, в которых свет может распространяться без заметного уменьшения амплитуды электромагнитных колебаний, прозрачные вещества. Однако, скорость света в веществе отличается от скорости света в вакууме, выражение для которой $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ мы в свое время получили. Повторим теперь проведенные ранее преобразования уравнений Максвелла, но теперь не для вакуума, а для некоторого вещества.

Выпишем уравнения Максвелла для случая отсутствия свободных зарядов и токов проводимости:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0; \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}};$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0; \qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \dot{\vec{D}}.$$

Мы будем также использовать выражения

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \qquad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H},$$

считая вещество однородным.

Как и раньше, ограничимся случаем плоской волны, когда электрическое и магнитное поля зависят от одной координаты - от координаты x, т.е. в последующих выражения из производных по координатам отличны от нуля только производные по x:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix} = -\vec{j}\frac{\partial E_Z}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial E_Y}{\partial x} = -\vec{i}\dot{B}_X - \vec{j}\dot{B}_Y - \vec{k}\dot{B}_Z .$$

Как видно из этого уравнения, $\dot{B}_X = 0$. Это означает, что x - составляющая магнитного поля не зависит от времени. Положим ее равной нулю, поскольку стационарное поле (магнитное как и электрическое) к распространению волны отношения не имеет.

Далее, вектор $\vec{E}$ имеет некоторое направление, и если мы вдоль этого направления направим ось $0Z$, то будет $E_Y = 0$ и, следовательно, $\dot{B}_Z = 0$ (см. уравнение). Таким образом,

$$\frac{\partial E_Z}{\partial x} = \dot{B}_Y . \qquad (*)$$

Аналогично получим

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = -\vec{j}\frac{\partial H_Z}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial H_Y}{\partial x} = \vec{i}\dot{D}_X + \vec{j}\dot{D}_Y - \vec{k}\dot{D}_Z ;$$

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\partial B_Y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0\dot{E}_Z$$

(поскольку $D_Y = 0$) и

$$\frac{\partial B_Y}{\partial x} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\dot{E}_Z . \qquad (**)$$

Продифференцируем уравнение (*) по координате x, а уравнение (**) по времени:

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} = \frac{\partial \dot{B}_Y}{\partial x} ; \qquad \frac{\partial \dot{B}_Y}{\partial x} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{E}_Z .$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\ddot{E}_Z .$$

Мы получили волновое уравнение, и скорость распространения света в веществе $v = 1/\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} = c/\sqrt{\mu\varepsilon}$. При распространении световой волны с большой степенью точности можно считать $\mu = 1$, и скорость света в веществе $v = c/\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, для нахождения значения скорости v необходимо знать значение диэлектрической проницаемости ε.

Заметим, что на больших частотах, характерных для световой волны, значение ε существенно отличается от стационарного, которое входит в уравнения электростатики, и - зависит от частоты. Соответственно, от частоты зависит и (фазовая) скорость распространения

световой волны в веществе. В таком случае говорят, что вещество обладает *дисперсией*.

Самым существенным, что происходит при взаимодействии поля $\vec{E}$ с веществом, это "подвижка" электронов, поляризация молекул. При этом поляризованность оказывается пропорциональной полю, что свидетельствует о квазиупругом характере действующих на электрон "возвращающих" сил. Поэтому при взаимодействии электронов со световой волной будет:

$$m_e\ddot{x} + \kappa x = eE_0\, exp(i\omega t).$$

Этому уравнению удовлетворяет решение вида $x = x_0\, exp(i\omega t)$. Подставив x в уравнение, получим:

$$x\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right) = \frac{eE}{m_e}; \qquad x = \frac{eE}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.$$

Итак, при смешении под действием электрического поля волны на электрон образуется диполь с моментом $p = ex$. Обозначив через N концентрацию электронов, мы получим такие выражения для поляризованности $\vec{P}$, для поляризуемости вещества κ и диэлектрической проницаемости ε:

$$\vec{p} = \kappa\varepsilon_0\vec{E} = \frac{e^2\vec{E}N}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)};$$

$$\kappa = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}; \qquad \varepsilon = 1 + \kappa = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.$$

В зависимости от соотношения между ω и ω_0 и от величины N величина ε больше или меньше единицы и даже отрицательной. Соответственно мы должны сказать, что скорость света в веществе

$$v = c/\sqrt{\varepsilon} = c\Big/\sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}}$$

будет либо меньше скорости света в вакууме, либо больше ее, либо мнимой. Эти возможности нам нужно будет обсудить более подробно. А пока сделаем одно уточнение.

В каком-то конкретном веществе входящие в атомы электроны могут иметь различные частоты свободных колебаний ω_{0k}, разными могут быть и их концентрации N_k. Все они будут вносить свой вклад в поляризованность вещества и, соответственно, в величину ε. поэтому в более общем случае выражение для скорости волны запишется в виде

$$v = c/\sqrt{\varepsilon} = c\Big/\sqrt{1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_{0k}^2 - \omega^2\right)}}.$$

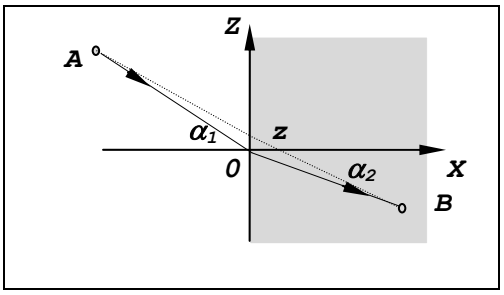
Таким получается выражение для *фазовой* скорости волны в веществе.

Лекция 6

4.7.2. Преломление света

Преломление луча света происходит при переходе из одной среды в другую. Причина преломления - изменение скорости распространения. Применим для получения закона преломления принцип Ферма.

Пусть скорость распространения света в некоторой среде равна v, в вакууме - c. Обычно скорость распространения света в среде меньше скорости в вакууме. Это означает, что для прохождения некоторого пути l в веществе потребуется несколько большее время



$$t = \frac{l}{v} = \frac{l}{c}\frac{c}{v} = \frac{l \cdot n}{c}.$$

Мы ввели обозначение $n = c/v$, эта величина называется показателем преломления. Произведение ln называют оптической длиной пути. Для вакуума $n = 1$. Если $n > 1$, то время распространения света от точки A до точки B будет уменьшаться при отклонении пути распространения от прямолинейного, причем при таком отклонении, когда длина пути в вакууме несколько увеличивается, а в веществе - уменьшается.

Подсчитаем время распространения света между точками A и B. Пусть (x_A, z_A) и (x_B, z_B) - координаты точек, z - координата точки преломления луча. В вакууме и в веществе свет проходит расстояния

$$l_A = \sqrt{x_A^2 + (z_A - z)^2} \qquad \text{и} \qquad l_B = \sqrt{x_B^2 + (z_B + z)^2},$$

время распространения -

$$t = \frac{l_A}{c} + \frac{l_B}{v} = \frac{1}{c}\sqrt{x_A^2 + (z_A - z)^2} + \frac{1}{v}\sqrt{x_B^2 + (z_B + z)^2}.$$

Согласно принципу Ферма

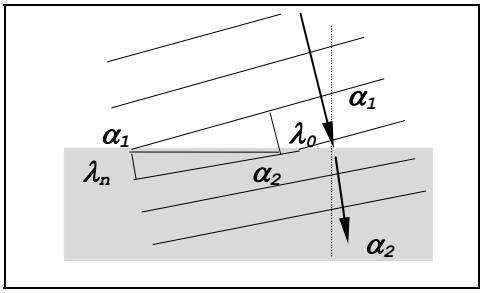
$$\frac{dt}{dz} = 0 = -\frac{1}{c}\frac{z_A - z}{\sqrt{x_A^2 + (z_A - z)^2}} + \frac{1}{v}\frac{z_B + z}{\sqrt{x_B^2 + (z_B + z)^2}} =$$

$$= -\frac{\sin\alpha_1}{c} + \frac{\sin\alpha_2}{v}.$$

Используя введенное ранее обозначение, мы можем записать закон преломления в виде:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c}{v} = n.$$

Получим теперь закон преломления иначе, анализируя пересечение границы плоской волной.



Нарисуем фронты волны таким образом, чтобы они проходили через максимумы напряженности электрического поля при одинаковом их направлении. Они будут совпадать с гребнями волн. Тогда расстояние между фронтами будет равно длине волны света.

Частота колебаний в вакууме и в оптически более плотной среде ($n > 1$), естественно, одинакова. Значит, длины волны в этих средах различаются так же, как различаются скорости, - в n раз. Это приводит к "излому" фронтов на поверхности оптически плотной среды, причем углы между фронтами и этой поверхностью α_1 и α_2 равны углам падения и преломления (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами).

Треугольники, в которых отрезки длиной λ_n и λ_0 являются катетами, имеют общую гипотенузу. Поэтому,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_n} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n.$$

Мы вновь получили закон преломления.

4.7.3. Дисперсия и поглощение света

Полученное нами ранее выражение для скорости распространения света является достаточно грубым приближением. Однако, оно позволяет в принципе понять причину зависимости скорости света от частоты.

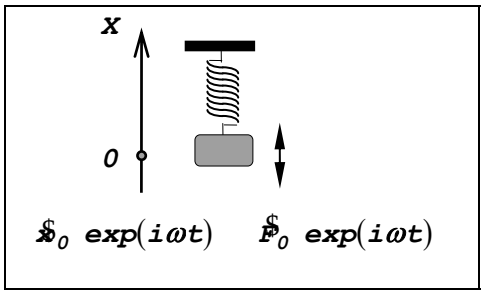
Заметим, что удовлетворительное описание зависимости фазовой скорости от частоты полученное нами выражение дает лишь при не слишком малой величине разности ω_0 и ω. Иначе амплитуда колебаний электронов становится слишком большой и некоторые наши утверждения оказываются неверными. Так, мы считали, что при колебании электронов не происходит диссипации механической энергии, что при больших амплитудах оказывается неверным. Кроме того, возникают некоторые проблемы с фазой колебаний.

Мы знаем, что при резонансе разность фаз колебаний вынуждающей силы (электрического поля $\vec{E}$) и координаты равно $\pi/2$. Это легко понять и запомнить после такого рассуждения.

При резонансе максимальны амплитуда и диссипация энергии. Значит, при резонансе максимальна мощность вынуждающей силы. Для этого необходимо, чтобы сила изменялась в фазе со скоростью:

$$x \sim \exp(i\omega t); \qquad E \sim \dot{x} \sim i\omega \exp(i\omega t).$$

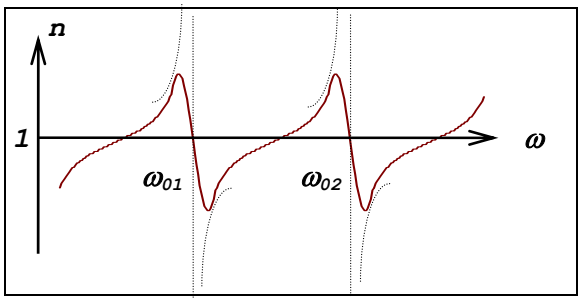
Умножение экспоненты на мнимую единицу как раз и означает изменение фазы колебаний на $\pi/2$. В таких условиях не будет пропорциональности между электрическим полем $\vec{E}$ и поляризованностью вещества $\vec{P}$ - они просто не совпадают по фазе, например, обращаются в нуль в разные моменты времени.



При малых потерях даже при не слишком большом различии ω_0 и ω разность фаз колебаний электрона и электрического поля можно считать равной нулю (при $\omega < \omega_0$) или π (при $\omega > \omega_0$). Это обстоятельство важно для нас по нескольким причинам.

Зависимость разности фаз от частоты мы в свое время обсуждали. Тем не менее представляется уместным сказать здесь об этом несколько слов.

Рассмотрим этот вопрос на примере движения грузика на пружине. При действии медленно изменяющейся силы ($\omega < \omega_0$) наличие грузика, собственно, несущественно - внешняя сила уравновешивается упругой силой деформированной пружины, и в соответствии с законом Гука эта сила пропорциональна смещению грузика. Поэтому изменение координаты, смещение происходит в фазе с силой.



Более удивительным представляется случай, когда частота вынуждающей силы больше резонансной частоты, когда смещение и сила изменяются в противофазе: не просто понять, почему грузик смещается, например, вверх, тогда как сила направлена вниз, "тянет" его в противоположную сторону. Для этого может быть предложено такое объяснение.

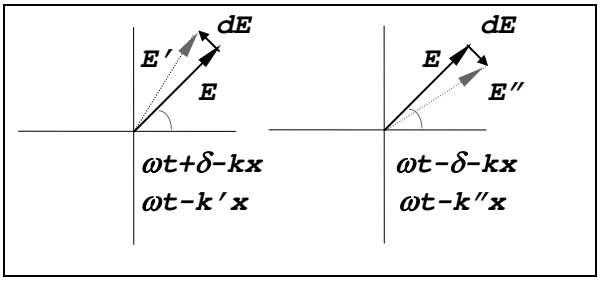
При большой частоте несущественным оказывается наличие пружины. Движение грузика определяется законом Ньютона, т.е. в фазе с силой изменяется *ускорение*, а это последнее - изменяется *в противофазе* со смещением.

Общий ход показателя преломления от частоты показан на рисунке. При частотах ω_{01}, ω_{02} происходит поглощение света, при частотах меньших или больших этих значений показатель преломления оказывается больше или меньше единицы. Это означает, что скорость распространения волны в веществе оказывается больше или меньше скорости света в вакууме. И это обстоятельство непосредственно связано с фазами колебаний электронов. Сколько-нибудь точный расчет, приводящий к такому результату, провести с нашим уровнем знаний не представляется возможным. Попробуем, тем не менее, понять причины изменения скорости распространения волны хотя бы качественно.

Дело в том, что, вообще говоря, скорость распространения электромагнитной волны и в веществе равна скорости волны в вакууме. Но при этом, проходя некоторый тонкий слой вещества, волна возбуждает в нем колебания электронов. В свою очередь, колебания электронов создают некоторую вторичную волну, которая складывается с волной, приходящей к этому слою. И здесь нам нужно провести достаточно тонкое рассуждение.

Сказанное означает, что *за слоем* колебания представляют собой сумму двух колебаний: колебаний проходящей волны и другой, "вторичной" волны, излученной колеблющимися электронами. Естественно, мы будем рассматривать (бесконечно) тонкий слой и амплитуда колебаний вторичной волны (бесконечно) мала. Но при этом амплитуда результирующих колебаний должна остаться прежней. Это возможно только в том

случае, если эти колебания различаются по фазе на $\pm\pi/2$. И это приводит к удивительному результату.



Обратимся к векторной диаграмме, которую мы уже неоднократно использовали для сложения колебаний. Пусть на этой диаграмме колебания проходящей волны представлены вектором длиной E, а вторичной волны dE. Как мы выяснили, эти векторы перпендикулярны и на рисунке показаны возможные взаимные расположения этих векторов.

С одной стороны в каждой точке частота колебаний одинакова. Но при переходе от точки к точке изменяется фаза колебаний, изменяется на $k\Delta x$. Таким образом, для этих колебаний в разных точках слагаемое $-kx$ имеет смысл начальной фазы. Но при распространении света в веществе при переходе от точки к точке мы "подключаем" все новые и новые слои вещества, которые добавляют к начальной фазе колебаний плюс или минус δ. Иначе говоря, при одной и той же частоте в веществе при переходе от точки к точке фаза колебаний изменяется либо больше, чем на $-kx$, либо меньше чем в вакууме. Говоря иначе, волновое число k в веществе другое, не такое, как в вакууме. Поэтому и наблюдаемая фазовая скорость в веществе $v = \omega/k$ другая, отличная от скорости в вакууме c.

Вспомним еще раз, что мы говорим о частотах, достаточно сильно отличающихся от резонансной, и при этом в зависимости от знака разности $\omega_0-\omega$ фаза колебаний электронов по отношению к фазе электрического поля принимает либо значение 0, либо $-\pi$. Поэтому, в зависимости от $\omega_0-\omega$ фазовая скорость либо меньше, либо больше c.

4.7.4. Групповая и фазовая скорости света в веществе

Человека, хоть немного сведущего в физике, сильно шокирует утверждение, что скорость света в веществе может быть больше скорости света в вакууме c. Такой человек обычно знает, что согласно теории относительности Эйнштейна скорость c - это максимальная скорость движения физического объекта. Но фазовую скорость нельзя связать с движением какого-нибудь объекта, это лишь скорость движения точки с постоянной фазой колебаний:

$$\omega t - kx = const; \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Иное дело групповая скорость $v = d\omega/dk$ - она не может быть больше c.

Обратимся к зависимости фазовой скорости световой волны от частоты:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon}; \qquad \varepsilon = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

и рассмотрим в качестве примера распространение рентгеновских лучей. Для них характерна очень большая частота колебаний, так что в

выписанном выражении можно пренебречь частотой ω_0, величина $\varepsilon < 1$. В этом случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0\omega^2} = 1 - \frac{\omega_\rho^2}{\omega^2}; \qquad \omega_\rho^2 = \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_0}.$$

Запишем выражение для квадрата волнового числа:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = \frac{\omega^2-\omega_\rho^2}{c^2}; \qquad k^2c^2 = \omega^2-\omega_\rho^2$$

и возьмем дифференциал от обеих частей полученного выражения:

$$c^2kdk = \omega d\omega; \qquad c^2 = \frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = vu.$$

Таково соотношение между скоростью света в вакууме, фазовой и групповой скоростями. При этом

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_\rho^2/\omega^2}} > c; \quad u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \omega_\rho^2/\omega^2} < c.$$

Таким образом, хотя фазовая скорость электромагнитной волны в рентгеновском диапазоне больше c, групповая скорость оказывается меньше этой величины.

4.7.5. Аномальная дисперсия

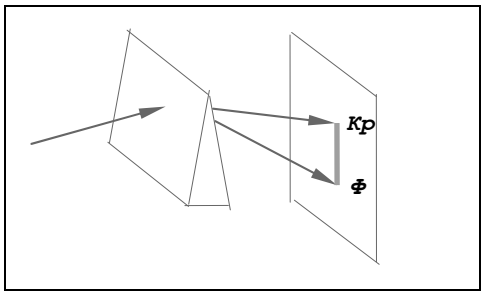
Присмотримся внимательнее к выражению для скорости света в веществе:

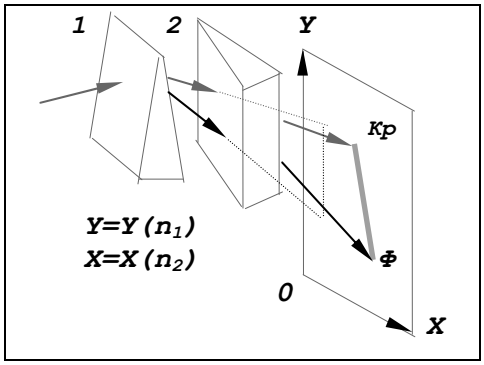
$$v = c/\sqrt{\varepsilon} = c\Big/\sqrt{1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_{0k}^2 - \omega^2\right)}}.$$

Слагаемые под знаком суммирования велики при частотах $\omega \sim \omega_0$. При резонансной частоте такое слагаемое меняет знак, причем при меньшей по отношению к резонансной частоте фазовая скорость больше скорости света в вакууме, а при большей $v < c$. Такую зависимость фазовой скорости от частоты называют *аномальной* дисперсией.

Нормальная дисперсия наблюдается в промежутке между соседними резонансными частотами ω_{0k} и ω_{0k+1}. Аномальная дисперсия наблюдается в узком диапазоне частот, это объясняет тот факт, что, как правило, прозрачные вещества обладают нормальной дисперсией.

Для наблюдения дисперсии может быть использована призма, при прохождении которой лучи света отклоняются к ее основанию. При нормальной дисперсии в видимой области показатель скорость распространения красного цвета больше, а показатель преломления больш меньше, чем фиолетового. Поэтому красный и фиолетовый цвета будут наблюдаться в разных точках экрана, как это показано на рисунке.

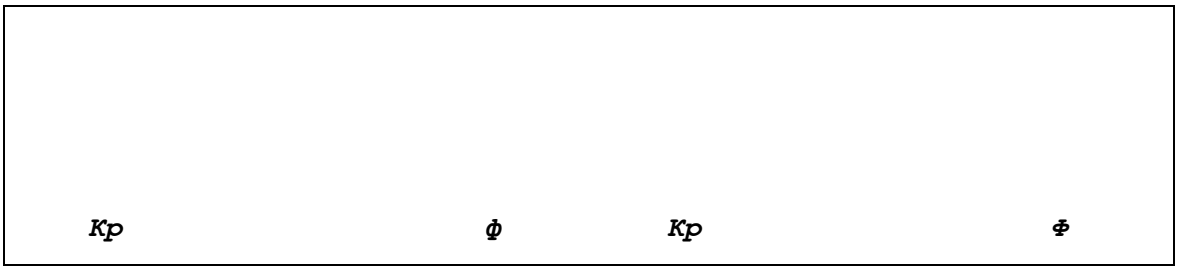




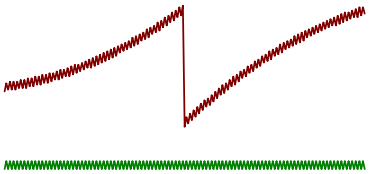
Для наблюдения аномальной дисперсии можно воспользоваться методом скрещенных призм. В этом случае отклонение по вертикали определяется дисперсией одной призмы, а по горизонтали - другой. Выбрав одну из призм такой, что дисперсия ее материала нормальная, мы сможем наблюдать на экране зависимость показателя преломления материала другой призмы от частоты.

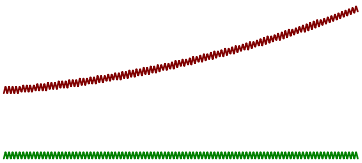
Ниже на рисунках показаны получающиеся при этом картинки. И более узкой области аномальной дисперсии происходит сильное поглощение света, что и определяет разрыв наблюдаемой кривой.

Как мы видели, ничего ненормального в аномальной дисперсии нет. Просто в некоторых диапазонах частот показатель преломления увеличивается, а в некоторых - уменьшается. Теперь мы понимаем, почему это так



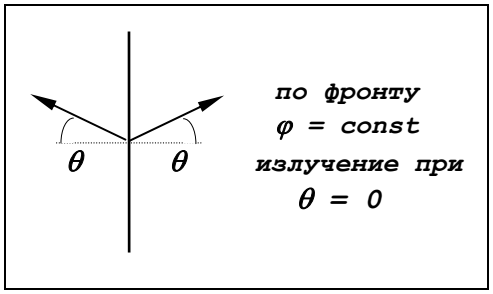
происходит.





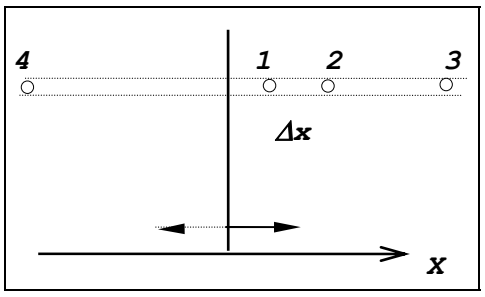
Лекция 7

5. Распространение (плоской) волны. Некоторые "тонкости"



Мне бы хотелось еще раз подчеркнуть, что колебания в некоторой области пространства вызывает колебания в соседних областях, они в свою очередь вновь вызывают колебания и так происходит распространение волны. Рассмотрим на примере плоской волны этот вопрос несколько подробнее.

На рисунке показана плоскость, параллельная фронту волны, распространяющейся направо. Колебания в этой плоскости происходят с постоянной (по осям координат) фазой, и мы выяснили, что в такой ситуации излучение происходит по направлению $\theta = 0$. Но таких направлений два - налево и направо. И представляется довольно естественным вопрос: почему волна распространяется только в одном направлении? Почему колебания электрического поля плоской волны в некоторой плоскости, параллельной фронту, вызывает распространение колебаний лишь в одном направлении, в направлении распространении волны? Попробуем ответить на этот вопрос.



Рассмотрим некоторую протяженную узкую область, например, в виде цилиндра, ось которой перпендикулярна фронту плоской волны $\xi=\xi_0\cos(\omega t-kx)$. Выберем в этой области две произвольные точки на расстоянии Δx. В этих точках, как и в любой другой точке внутри выделенной области, происходят колебания вида $\xi_0\cos(\omega t+\varphi)$. При этом разность фаз колебаний $\varphi_2-\varphi_1 = -k\Delta x$ - мы уже говорили, что для разных точек вдоль оси $0X$ величина $-kx$ имеет смысл начальной фазы.

Эти точки (области малого объема) являются (не "могут считаться", а именно "являются"!) источниками волн, распространяющихся во времени колебаний. И эти колебания в точке 3 происходят в фазе, складываются. Действительно, колебания в точке 1 опережают колебания в точке 2 на $k\Delta x$, но из этой точки колебания до точки 3 распространяются дольше на $\Delta t = \Delta x/v = \Delta x\cdot k/\omega$. Поэтому разность фаз колебаний волн, приходящих в точку 3 из точек 1 и 2

$$\Delta\varphi_3 = \left(\omega t-k\left(x_3-x_2\right)\right) - \left(\omega\left(t+\Delta t\right)-k\left(x_3-x_1\right)\right) =$$
$$= k\left(x_2-x_1\right) - \omega\Delta t = k\Delta x - k\Delta x = 0 .$$

Естественно, из точек 1 и 2 колебания распространяются и назад, к точке 4. Но теперь дольше распространяются колебания от точки 2. Поэтому

$$\Delta\varphi_4 = \left(\omega\left(t+\Delta t\right)-k\left(x_3-x_2\right)\right) - \left(\omega t-k\left(x_3-x_1\right)\right) =$$
$$= k\left(x_2-x_1\right) + \omega\Delta t = k\Delta x + k\Delta x = 2k\Delta x \neq 0$$

и всегда найдутся такие две точки, что будет выполняться равенство $2k\Delta x = \pi$, - колебания будут гасить друг друга.

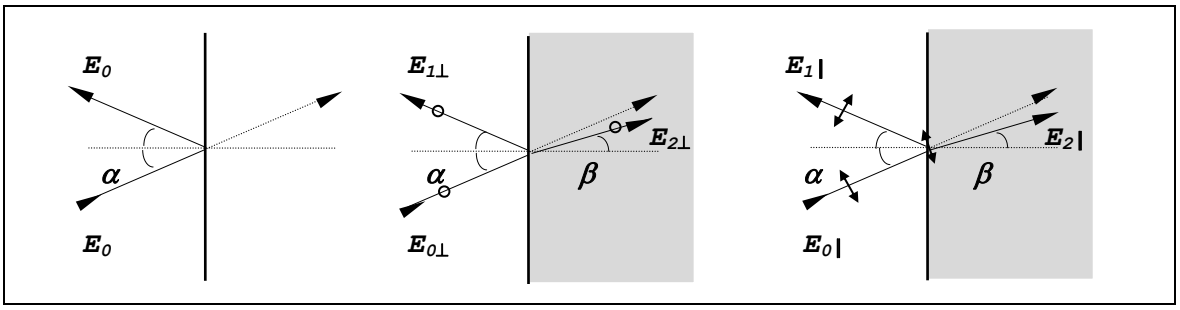
Этим и объясняется, то обстоятельство, что если в некоторой области распространяется плоская волна, то в противоположном направлении распространения колебаний возникать не будет.

6.1. Отражение света на границе раздела двух сред

Рассмотрим несколько подробнее процесс отражения на границе двух сред.

Прежде всего вспомним, что мы говорили при анализе отражения света от металлического зеркала. При падении на поверхность металла волна, естественно, вызывает колебания находящихся в нем электронов. Эти колеблющиеся электроны, в свою очередь, влево и вправо от поверхности излучают плоские волны с амплитудой, равной по модулю амплитуде падающей волны и противоположной по знаку. То, что эти вторичный волны одинаковы следует из соображений симметрии, а изменение знака амплитуды следует из такого элементарного рассуждения. В направлении распространения падающей волны (в металле) волна не распространяется. Но она равна сумме волны падающей и излученной колеблющимися электронами. Значит, их амплитуды противоположны по знаку.

Обратите внимание - мы не анализируем характер движения электронов, не подсчитываем амплитуду их колебаний и амплитуду излучаемых волн и проч. Мы судим о одной из волн по результату сложения другой с падающей волной.

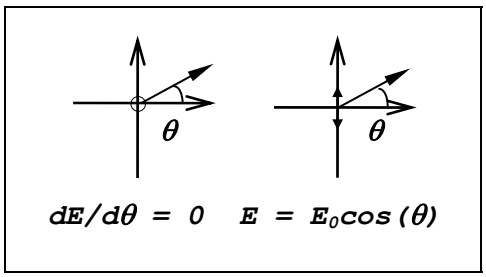


При падении луча света на границу раздела двух сред, когда возможно распространение волны (в отличии от металла) в обеих средах, происходят достаточно сложные процессы. И прежде всего сложности связаны с тем, что процесс отражения происходит по-разному для волн, колебания вектора электрического поля которых происходят перпендикулярно плоскости падения ($E_{0\perp}$) и параллельно ей ($E_{0\parallel}$). Любая волна представляет собой сумму волн с такими направлениями колебаний электрического вектора, но процессы отражения и преломления их мы рассматриваем по отдельности, одновременно их сравнивая.

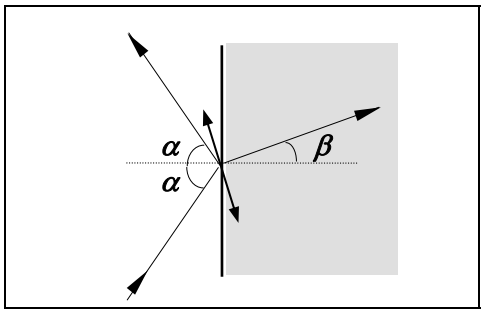
Введенные обозначения должны быть понятны из рисунка.

Отражение двух компонент с разными направлениями линейной поляризации происходит по-разному. Отраженная волна, как и в случае металлического зеркала, излучается колеблющимися электронами Среды, и их колебания происходят в направлении, перпендикулярном преломленному лучу.

Вспомним особенности зависимости амплитуды излучаемой диполем в *перпендикулярной* и *параллельной* направлению его колебаний плоскостях. В первой амплитуда волны не зависит от направления, как это и следует из соображений симметрии. Иначе обстоит дело в параллельной направлению колебаний плоскости.



Дело в том, что в направлении, совпадающим с направлением колебаний, диполь волну не излучает. Для произвольного направления, составляющим угол θ с направлением колебаний диполя, амплитуда колебаний $E = E_0\cos(\theta)$. Это будет понятным, если вспомнить, что диполь можно представить как сумму двух диполей - параллельного направлению излучения $p\sin(\theta)$ (амплитуда излучаемой волны нулевая) и перпендикулярного - $p\cos(\theta)$.



Таким образом, в перпендикулярном преломленному лучу направлении и при параллельной плоскости падения поляризации свет отразиться не может: амплитуда отраженной волны в этом случае пропорциональна $\cos(\alpha+\beta)$ - угол между преломленным лучем, который направлен перпендикулярно направлению колебаний диполя, и лучем отраженным равен $180^0-\alpha-\beta$, и $\cos(180^0-\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta)$.

Это обстоятельство приводит к любопытному эффекту: при $\alpha+\beta=\pi/2$ отражения света при такой поляризации не происходит. Такой угол падения называется углом Брюстера:

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\pi/2-\alpha)} = tg(\alpha).$$

Коэффициентом отражения называют отношение интенсивности отраженного луча к интенсивности луча падающего. Они, в свою очередь, пропорциональны квадратам амплитуд колебаний соответствующих волн. Их значения даются формулами Френеля. Мы опустим вывод этих формул, но упомянуть о них необходимо:

$$\frac{E_{1\parallel}}{E_{0\parallel}} = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}; \qquad \frac{E_{1\perp}}{E_{0\perp}} = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Знак '-' перед отношениями тригонометрических функций означает, что при отражении от границы с оптически более плотной средой ($\alpha>\beta$) отражение происходит с потерей полуволны.

Соответственно, коэффициенты отражения

$$\rho_{\parallel} = \frac{tg^2(\alpha-\beta)}{tg^2(\alpha+\beta)}; \qquad \rho_{\perp} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

При $\alpha+\beta=\pi/2$ будет $tg(\alpha+\beta) = \infty$ и $\rho_{\parallel} = 0$.

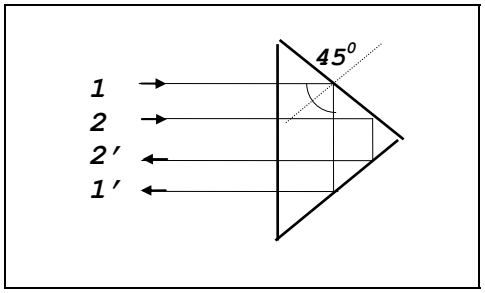
6.2. Полное отражение

До сих пор мы рассматривали падение луча на границу вакуум - некоторое вещество, в вакууме $n=1$. При падении света на границу раздела двух сред, для которых $n_1 \neq 1$ и $n_2 \neq 1$ вид закона преломления несколько изменится:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

При падении света на границу с оптически менее плотной средой ($n_1 > n_2$) относительный показатель преломления $n_{12} < 1$ и $\beta > \alpha$, и если $\sin(\alpha) = n_{12}$, то $\beta = \pi/2$. При дальнейшем увеличении угла α преломленного луча наблюдаться не будет.

Такой предельный угол падения называется углом полного отражения - при таком и больших значениях α коэффициент отражения равен единице.



Явление полного (внутреннего) отражения используется в так называемой обращающей призме. Обычно это прямоугольная призма, угол падения на границу равен $\alpha = 45^0$. Чтобы происходило полное внутреннее отражение необходимо, чтобы коэффициент преломления n был больше $1/\sin(\alpha) = \sqrt{2}$.

При отражении от металлического зеркала мы говорили, что отраженная волна генерируется в результате колебаний электронов металла вблизи поверхности. Но при отражении от поверхности, разделяющей некую среду и вакуум, справа от поверхности электронов нет. Тогда возникновение отраженной волны можно объяснить только таким образом.

Электромагнитное поле проникает правее поверхности отражения, в вакуум, и там происходят электромагнитные колебания. Эти колебания и вызывают появление волны, которая гасит волну падающую (справа от границы отражения), и создает волну отраженную. И вот здесь, для понимания физики отражения оказывается существенным прежнее наше замечание, что при колебаниях электронов причиной излучения является, собственно, не сами колебания электронов, а колебания электромагнитного поля, которые обусловлены колебаниями электронов. В рассматриваемом случае электронов справа от поверхности отражения нет, но есть колебания электромагнитного поля как причина излучения отраженной волны.

Обратимся вновь к отражению световой волны на границе раздела вакуум-металл. В этом случае также происходит проникновение электромагнитного поля за границу отражения - в металл. При этом диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} < 0.$$

При таком условии распространения волны наблюдаться не будет. Формально при отрицательном значении ε скорость распространения становится величиной мнимой как и показатель преломления $n = c/v$.

Давайте также формально воспользуемся выражением для фазовой скоростью в случае мнимого ее значения:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{in'} = \frac{\omega}{ik'}.$$

Вместо действительного волнового числа k в знаменателе теперь стоит мнимая величина ik'. Запишем выражение для колебаний в "волне" при мнимом волновом числе:

$$\xi = \xi_0 \exp\left(i\left(\omega t - ik'x\right)\right) = \underline{\xi_0 \exp\left(k'x\right)} \cdot \exp\left(i\omega t\right).$$

Мы получили выражение для колебаний, амплитуда которых экспоненциально зависит от координаты. Физический смысл это выражение может иметь только при $k'<0$ - амплитуда колебаний не может расти неограниченно. Заметим, что этот результат может быть получен и непосредственно из уравнений Максвелла.

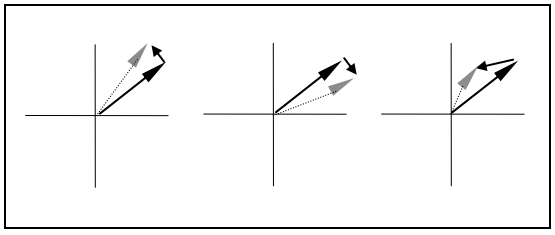
Металлы часто бывают окрашенными. Мы наблюдаем их в отраженном свете и причина окрашенности отраженного света в том, что при некоторой частоте (частотах) электромагнитные колебания поглощаются в металле. Это согласуется с утверждением, что электромагнитная волна проникает на некоторую глубину внутрь металла. Об этом свидетельствует и то, что (весьма) тонкий слой металла может пропускать свет, коэффициент отражения ρ тонкого слоя зависит от его толщины. Такое зеркало называют полупрозрачным и оно используется на практике достаточно часто. Коэффициент пропускания такого зеркала равен $1-\rho$ зависит от того, как сильно уменьшается амплитуда колебаний $\xi_0 \exp\left(k'x\right)$. Вспомним еще раз, что в этом выражении $k'<0$.

Цвет металла в проходящем свете оказывается дополнительным к цвету, наблюдаемому при его (света) при отражении.

6.3. Затухание волны

При частотах, близких к резонансной, происходит поглощение волны. Сколько-нибудь точный обсчет этого процесса для нас затруднителен. Ограничимся поэтому лишь качественным обсуждением того, что при этом происходит.

Объясняя, каким образом фазовая скорость может быть больше или меньше скорости света в вакууме, мы рассматривали сложение распространяющейся (со скоростью c), так сказать, первичной волны и другой, излучаемой колебаниями электронов некоторого слоя вещества. При этом соответствующая "добавка", вектор $d\vec{E}$ был направлен перпендикулярно вектору $\vec{E}$. И направление вектора $d\vec{E}$ либо совпадало с направлением вращения вектора $\vec{E}$, либо противоположно. Связано это было со значением разности фаз между вынуждающей силой (действующим на электроны электрическим полем) и смещением электронов. Эти два случая соответствуют разности фаз 0 или π.



При резонансе разность фаз равна $\pi/2$. Поэтому вектор $d\vec{E}$ оказывается направлен вдоль вектора $\vec{E}$ или составляет с ним некоторый угол, отличный от $\pi/2$. В результате изменяется амплитуда колебаний. При затухании волны,

поглощении энергии, естественно, должно наблюдаться уменьшение амплитуды.

Соответствующее выражение для затухающей плоской волны можно получить, введя комплексное выражение для волнового числа:

$$k = k'' - ik';$$

$$\xi = \xi_0 \exp\left(i\left(\omega t - k''x + ik'x\right)\right) = \underline{\xi_0 \exp\left(-k'x\right)} \cdot \exp\left(i\left(\omega t - k''x\right)\right).$$

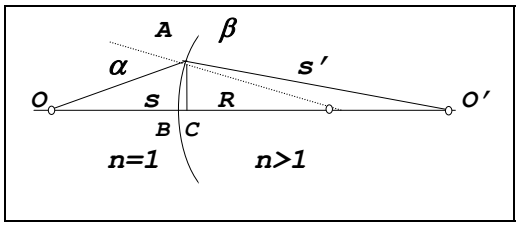
Мы получили выражение для волны с экспоненциально убывающей амплитудой.

Отметим, что векторы $\vec{dE}$ и $\vec{E}$ - это вспомогательные векторы векторной диаграммы, не векторы электрических полей.

Лекция 8

7. Линза

7.1. Фокусные расстояние для сферической поверхности



Рассмотрим прохождение световой волной сферической поверхности, разделяющей вакуум и некоторую среду, например, стекло, показатель которой равен n. Пусть в точке O находится источник света.

Ранее мы получили соотношение между углом излучения (падения) луча света и производной начальной фазы вдоль поверхности раздела двух сред:

$$\sin(\theta) = \frac{d\varphi}{dl}\frac{\lambda}{2\pi}.$$

В данном случае справа и слева у нас разные углы θ - это углы падения α и β, и разные длины волн - λ_0 в вакууме и λ в стекле. Прямая OO' обозначает оптическую ось и мы ограничиваемся параксиальными лучами, т.е. лучами, проходящими через преломляющую поверхность вблизи оптической оси. Это означает, что углы α и β малы.

С учетом этих замечаний мы можем записать:

$$\alpha \approx \frac{h}{R} + \frac{h}{s} = \frac{d\varphi}{dl}\frac{\lambda_0}{2\pi}; \qquad \beta \approx \frac{h}{R} - \frac{h}{s'} = \frac{d\varphi}{dl}\frac{\lambda}{2\pi}.$$

Здесь h - расстояние точки A от оптической оси.

Из этих уравнений следует:

$$\frac{\frac{1}{R}+\frac{1}{s}}{\frac{1}{R}-\frac{1}{s'}} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = n; \qquad \frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{n-1}{R}.$$

Собственно, мы здесь записали закон преломления для малых углов

$$\frac{\alpha}{\beta} = n$$

и из него получили выражение, с помощью которого можно подсчитать радиус сферической поверхности, необходимой для того, чтобы вышедшие из точки O лучи собирались в точке O'.

Ограничиваясь лишь рассмотрением параксиальных лучей, мы можем не делать различия между величинами s и s' с одной стороны и длинами отрезков OB и $O'B$ с другой. Обозначим длины этих отрезков как x и x'.

Устремив теперь величину x к бесконечности (на сферическую поверхность падает плоская волна), мы получим

$$\frac{n}{f'} = \frac{n-1}{R}; \qquad f' = \frac{nR}{n-1}.$$

Иначе говоря, при падении на сферическую поверхность параллельного пучка параксиальных лучей они соберутся в точке ***O′*** на расстоянии ***x′=f′*** от поверхности. Величина ***f′*** называется фокусным расстоянием.

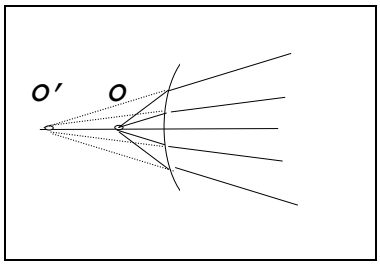
Если мы хотим, чтобы вышедшие из точки ***O*** лучи после преломления на сферической поверхности были параллельны оптической оси, нам в полученном выражении нужно положить равной бесконечности величину ***x′≈s′*** и тогда

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}; \qquad f = \frac{R}{n-1}.$$

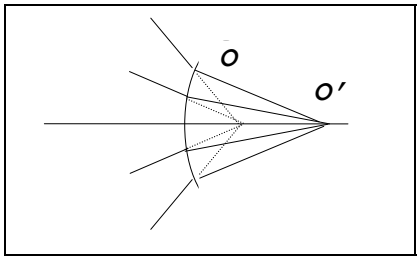
Таким образом, слева и справа фокусные расстояния неодинаковы и различаются в ***n*** раз.

С учетом полученных выражений мы можем записать такие соотношения:

$$\frac{1}{x} + \frac{n}{x'} = \frac{1}{f} \quad \text{или} \quad \frac{1}{x} + \frac{n}{x'} = \frac{n}{f'}.$$



Предположим теперь, что величина ***x<f***. тогда будет ***n/x′<0***. Это означает, что точка ***O′*** будет находиться слева от сферической поверхности. Точку ***O′*** называют изображением точки ***O***. Если ***x′<0***, реальные лучи не пересекаются в точке ***O′***, они идут после преломления таким образом, как если бы они вышли из этой точки. В таком случае говорят, что изображение точки ***O*** мнимое. Если лучи пересекаются в точке ***O′***, то говорят о действительном изображении.



Но может быть и такое положение, что лучи направлены в точку ***O***, расположенную справа от поверхности (***x<0***) и после преломления пересекаются в точке ***O′***. Тогда говорят о мнимом источнике света, в отличии от действительного, из которого на самом деле исходят лучи света. Разумеется, при ***x′<f′*** мнимый источник расположен по отношению к преломляющей поверхности ближе правого фокусного расстояния.

7.2. Фокусное расстояние линзы

Обычно используется устройство из стекла или другого материала, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Если эти поверхности расположены близко друг от друга, говорят о тонкой линзе. Подсчитаем фокусное расстояние тонкой линзы.

Пусть радиусы сферических поверхностей, отделяющих стекло от вакуума, равны R_1 и R_2. Запишем координату точки, в которой собрались бы параллельные оси лучи справа от первой поверхности:

$$f' = \frac{nR}{n-1}.$$

На таком расстоянии оказывается изображение бесконечно удаленного источника света после прохождения первой сферической поверхности. Оно является (мнимым) источником для второй сферической поверхности. Применим полученное выше выражения для определения координаты изображения точки O', которое получается с помощью второй сферической поверхности. Но здесь необходимы некоторые пояснения.

Заменяя x на y, мы можем записать для нее такое выражение:

$$\frac{n}{y} + \frac{1}{y'} = \frac{n-1}{R_2}.$$

В этом выражении нам следует положить $y=-f'$, поскольку (мнимый) источник находится правее преломляющей поверхности, а поверхности мы считаем близко расположенными. Наконец, в точке с координатой y' соберутся параллельные лучи, падающие на линзу. Поэтому введем обозначение $F'=y'$ - фокусное расстояние линзы. Таким образом,

$$-\frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{F'} = \frac{n-1}{R_2}; \qquad \frac{1}{F'} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Если по обе стороны линзы вакуум, то левый и правый фокусы находятся на одинаковых расстояниях от нее. Докажем это утверждение, повторив с некоторыми изменениями наши рассуждения.

Если источник света расположен в левом фокусе линзы F, после нее пучок лучей должен быть параллельным оптической оси. Для этого изображение источника, полученное с помощью первой поверхности должно находиться в левом фокусе второй преломляющей поверхности (слева от первой, почему $x'<0$). Кроме того $y'=\infty$. Поэтому:

$$\frac{1}{F} + \frac{n}{x'} = \frac{n-1}{R_1}; \qquad \frac{n}{y} = -\frac{n}{x'} = \frac{n-1}{R_2};$$

$$\frac{1}{F} = (n-1)\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{F'}.$$

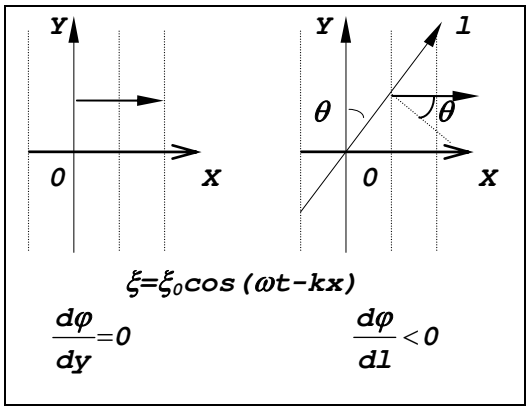
Что мы и хотели доказать.

7.3. Фокусное расстояние линзы. Другой подход

Решая ту или иную задачу мы применяем, по возможности, самый подходящий метод решения. И, вообще говоря, нет нужды решать задачу еще и другим методом. Но некоторые методы не слишком просты и сами по себе не всегда до конца понятны. Тогда и решение задачи также оказывается непонятным. Поэтому полезно иногда решить одну и ту же задачу разными методами. Собственно, нашей целью является не столько изучение задач, сколько изучение разных методов их решения. Поэтому мы сейчас и обращаемся к задаче об определении фокусного расстояния линзы, используя иные рассуждения.

Вернемся вновь к задаче распространения волны, плоской волны. Вдоль показанного на рисунке фронта фаза колебаний постоянна - согласно определению фронта. Эти колебания, как мы знаем, являются

источниками других колебаний, распространение которых и есть распространение волны. Причем очень удобно, что мы заранее знаем направление ее распространения.



Колебания вдоль фронта происходят в фазе, на левой картинке $d\varphi/dx=0$ и излучение происходит по нормали к поверхности фронта, что не представляется удивительным.

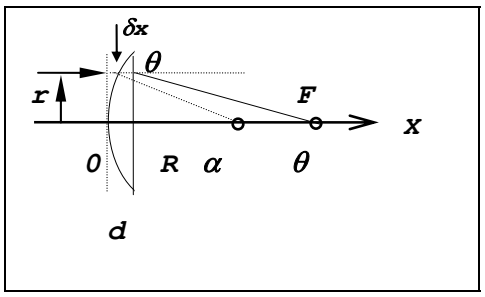
Проведем теперь плоскость под углом θ к фронту волны. Мы уже говорили, что величина $-kx$ при определенном x имеет смысл начальной фазы. Поэтому вдоль оси Ol начальная фаза колебаний изменяется по закону:

$$\varphi(l) = -kx = -kl\sin(\theta) = -\frac{2\pi}{\lambda} l\sin(\vartheta).$$

По отношению к нормали к этой поверхности направление излучения происходит, как видно из рисунка, под углом θ. Этот же результат дает и полученное ранее выражение:

$$\sin(\theta) = -\frac{d\varphi}{dl}\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta)\frac{\lambda}{2\pi}.$$

В данном случае мы не получили нового результата, просто убедились, что полученная нами выражение действительно "работает". А теперь применим его в задаче об определении фокусного расстояния линзы.



Для простоты рассмотрим плоско-выпуклую линзу с показателем преломления материала n.

Проведем некоторые расчеты. Пусть в плоскости с $x=0$ начальная фаза колебаний равна нулю. Тогда в плоскости при $x=d$ (на задней поверхности линзы) начальная фаза на оптической оси $\varphi_0=-k'd$ (k'- волновое число волны в стекле). Иная фаза на задней поверхности линзы при $x=d$ на расстоянии r от оптической оси:

$$\varphi(r) = -k\delta x - k'(d-\delta x) = \varphi_0 + (k'-k)\delta x = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\delta x,$$

поскольку $k=2\pi/\lambda$ и $k'/k=n$. Кроме того в этом выражении δx - координата точки пересечения параллельного оптической оси луча в передней поверхностью линзы:

$$\delta x = R(1-\cos(\alpha)) \approx R\frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{R}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{r^2}{2R}.$$

Таким образом,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\frac{r^2}{2R}\right) = \frac{2\pi(n-1)}{\lambda}\frac{r}{R}.$$

Таким образом, мы получаем выражение для фокусного расстояния плоско-выпуклой линзы:

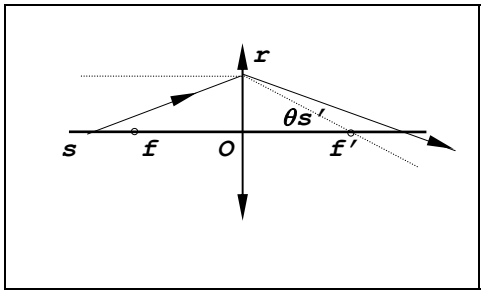
$$\sin(\theta) \approx -\frac{r}{F} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\lambda}{2\pi} = -\frac{2\pi(n-1)}{\lambda}\frac{r}{R}\frac{\lambda}{2\pi} = -(n-1)\frac{r}{R};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R},$$

что, естественно, совпадает с полученным ранее результатом при $R_1=R$ и $R_2=\infty$. Значит, и в этом случае выражение $\sin(\theta)=-(d\varphi/dy)(\lambda/2\pi)$ "работает".

7.4. Построение изображения предмета. Увеличение

Предположим, что на некотором расстоянии от линзы находится освещенный предмет, каждая тоска которого тем самым является источником света. Рассмотрим сначала лучи, исходящие из точки предмета, находящиеся на оптической оси линзы.



При падении на тонкую линзу на ее задней поверхности вдоль радиуса создается некоторая зависимость фазы колебаний

$$\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{2\pi}{\lambda}\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r}{f}.$$

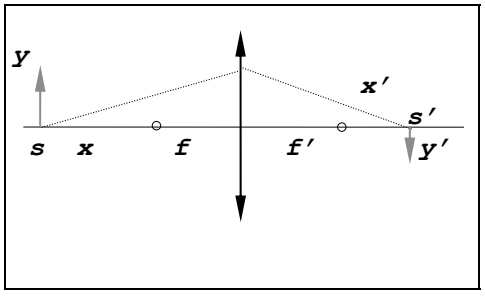
При косом падении лучей к этой производной фазы по радиусу добавляется еще

$$\frac{d\varphi_2}{dr} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r}{s}.$$

В результате угол направления излучения света будет:

$$\frac{r}{s'} = \left(\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d\varphi_2}{dr}\right)\frac{\lambda}{2\pi} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{r}{f} - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r}{s}\right)\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{r}{f} - \frac{r}{s};$$

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}; \qquad f = \frac{ss'}{s+s'}.$$



Введем обозначения

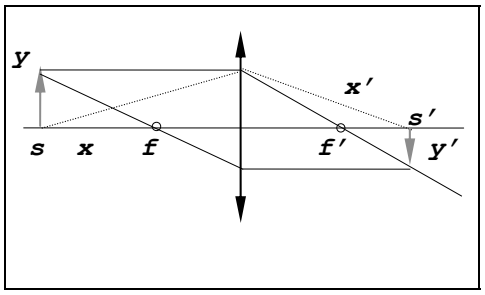
$$x = s-f; \quad x' = s'-f' = s'-f$$

и перемножим эти величины:

$$xx' = ss'-f(s+s')+f^2 = f^2;$$

$$xx' = f^2.$$

Мы доказали, что на расстояниях x и x' находятся изображения нижних (совпадающих с оптической осью) концов предметов. А теперь проведем такие построения.



Проведем через верхний конец предмета на высоте y горизонтальный луч. После пересечения линзы он будет направлен в правый фокус. Другой луч проведем из верхнего конца предмета через левый фокус линзы - после ее пересечения он будет параллелен оптической оси. В точке их пересечения будет находиться изображение верхнего конца предмета.

Из подобных треугольников получаем выражения:

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{f}; \qquad x = \frac{y}{y'} f;$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f}; \qquad x' = \frac{y'}{y} f.$$

Мы доказали, что изображения верхних концов также находятся на таком же расстоянии от линз, что и нижних. Иначе, изображение перпендикулярного оптической оси предмета также ей перпендикулярно.

Теперь нам осталось лишь получить выражения для увеличения. Оно легко получается из выписанных выражений:

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f}.$$

Чтобы подсчитать увеличение нам нужно знать положение предмета относительно фокуса линзы и, конечно, величину фокусного расстояния.

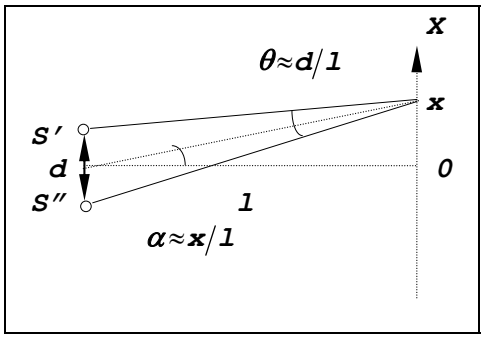
Лекция 9

8. Интерференция

Этим словом обозначается, в общем-то, всего лишь сложение волн. Всего лишь сложение, но при этом возникает много вопросов и сложностей. Прежде всего дело в том, что волна является весьма непростым объектом, объектом более сложным, чем нам это представляется на данном этапе.

Кроме того многообразными и не очень простыми оказываются схемы наблюдения разных явлений, возникающих в результате сложения волн, их интерференции. Так что лучше всего заранее настроится на обсуждение многочисленных и достаточно непростых вопросов.

8.1. Двухлучевая интерференция. Точечные источники



Собственно, эту задачу мы уже решали - при падении на экран двух волн от разнесенных на расстояние d точечных источников должны наблюдаться минимумы и максимумы интенсивности. Если расстояние до экрана $1>>d$, то, как мы выяснили ранее, расстояние между минимумами оказывается равным

$$\Delta x = \frac{1\lambda}{d}.$$

Обычно расстояние между источниками составляет несколько длин волн, и расстояние между минимумами Δx оказывается не слишком маленьким.

Мы кроме того считаем, что координата точки наблюдения $x<<1$, и это обстоятельство позволяет ввести понятие углового расстояния между источниками $\theta \approx d/1$. Тогда выражение для ширины интерференционного максимума может быть записано в виде:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}.$$

Получим это выражение еще одним способом. На достаточно большом расстоянии от источников приходящие от них волны можно считать плоскими, и вблизи нуля на оси OX углы падения этих волн будут равны $+\theta/2+x/1$ и $-\theta/2+x/1$. Далее, при падении плоской волны на экран, как мы в свое время выяснили, фаза электромагнитных колебаний будет зависеть от координаты:

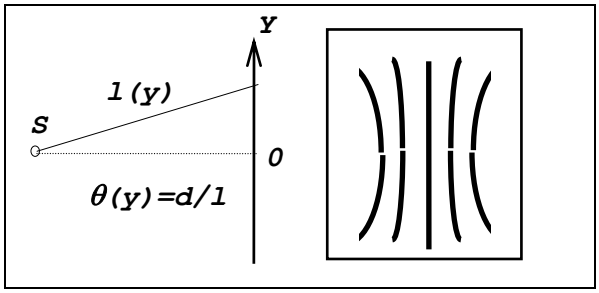
$$\frac{d\varphi'}{dx} = \left(-\frac{\theta}{2}+\frac{x}{1}\right)\frac{2\pi}{\lambda}; \qquad \frac{d\varphi''}{dx} = \left(+\frac{\theta}{2}+\frac{x}{1}\right)\frac{2\pi}{\lambda}.$$

Проинтегрировав эти уравнения, мы получим такие выражения для зависимости фаз колебаний от координаты:

$$\varphi' = \left(-\frac{\theta}{2}x + \frac{x^2}{2l}\right)\frac{2\pi}{\lambda}; \qquad \varphi'' = \left(+\frac{\theta}{2}x + \frac{x^2}{2l}\right)\frac{2\pi}{\lambda}.$$

Мы посчитали фазы равными нулю при $x=0$. В этой точке будет наблюдаться максимум колебаний. Ближайший к нему минимум будет наблюдаться на расстоянии полуширины линии $\Delta x/2$, которое определяется условием

$$\varphi'' - \varphi' = 2\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{\theta}{2}\,\frac{\Delta x}{2} = \frac{\pi\theta}{\lambda}\Delta x = \pi; \qquad \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}.}$$



Мы рассматривали, как это обычно и делается, интерференцию волн от точечных источников, от которых, стало быть, исходят сферические волны. При удалении от точки наблюдения в перпендикулярном к плоскости рисунка направлении (вдоль оси OY) будет уменьшаться угловое расстояние между источниками θ, и полосы будут наблюдаться в виде расходящихся дуг.

На практике, однако, вместо точечных источников используются параллельные оси OY щели, которые освещаются некоторыми источниками света. В пределах щели происходят электромагнитные колебания и они действуют как множество непрерывно расположенных точечных источников. В этом случае интерферируют цилиндрические волны и интерференционные полосы параллельны друг другу.

8.2. Опыт Юнга. Когерентность волн

При наблюдении интерференционной картины возникают некоторые не вполне очевидные трудности. Представим себе, что в качестве источников цилиндрических волн мы попытались использовать нити двух электрических лампочек. Излучение раскаленных нитей осуществляется ускоренным движением электронов в нитях, никак друг с другом не связанных. Такие волны, естественно, не будут иметь одинаковые начальные фазы, которые при записи соответствующих выражений мы просто считали нулевыми. И эти начальные фазы не только различны у рассматриваемых двух волн, но и непостоянны во времени, изменяются случайным образом. Такие волны называют некогерентными.

В принципе нам не обязательно нужно, чтобы начальные фазы колебаний от двух источников были равны. Нам надо, чтобы постоянной во времени была разность фаз этих колебаний. Если это требование выполняется, то волны (или источники) называют когерентными. Это определение *когерентности* волн (источников волн).

Таким образом, возникает проблема: как добиться того, чтобы источники были когерентными?

Представим себе, что источником (приблизительно) цилиндрических волн является вертикально расположенная раскаленная полоска металла. Понятно, что она будет излучать свет по разным направлениям как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях.

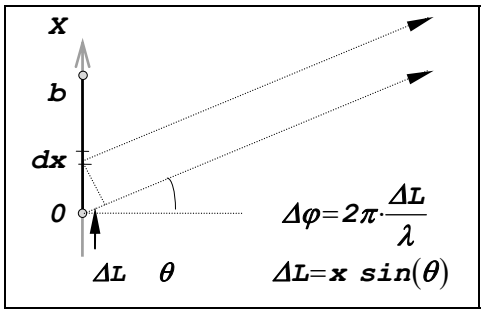
Мы связали направление излучения с производной фазы колебаний по координате. Из огромного числа колеблющихся электронов найдутся и такие, которые в данный момент колеблются с (примерно) одинаковой

фазой. Их излучение будет направлено по нормали к полоске. Но найдутся и электроны, которые колеблются так, что для них производная фазы по направлению вдоль некоторой прямой, "нарисовано" на поверхности полоски, имеет отличное от нуля значение. Их излучение будет направлено под некоторым углом к излучающей поверхности.

Но пусть какая-то группа электронов излучает волну примерно по нормали и она попадает затем на экран. Однако, в следующий промежуток времени это будут уже другие электроны, начальная фаза падающей на экран волны будет другой. Но, разумеется, в течение некоторого времени она все же будет иметь какое-то значение, будет (примерно) постоянной. Такое постоянство фазы определяет *временную* (с ударением на 'у') *когерентность*.

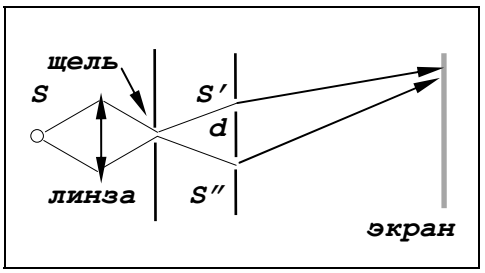
При этом волна не будет направлена строго по одному направлению, она обязательно будет распространяться в некотором телесном угле. Значит в точках на некоторых расстояниях в поперечном направлении фаза колебаний будет одинаковой. И чем дальше от источника, тем эти расстояния, естественно, будут больше. В таком случае говорят о *пространственной когерентности*.

Поэтому можно, например, осветить пару щелей достаточно удаленным источником электромагнитных колебаний. Например, весьма велика пространственная когерентность у света, который приходит от звезд. Вот только сила света при этом оказывается очень малой.



Проще (при меньшем удалении от источников и с большей силой света) осветить когерентным светом одну узкую щель. Выделив на ней поперечную полоску, мы можем надеяться, что в ее пределах колебания будут когерентными. Такая полоска может рассматриваться как система непрерывно расположенных точечных источников, зависимость амплитуды волны от угла мы с Вами ранее посчитали:

$$A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \sin(\theta)}{\lambda}}.$$



Чем уже щель, тем больше угол, в пределах которого происходит излучения. И в пределах этого угла излучение будет когерентным.

Эта идея реализована в классическом опыте Юнга. На экране наблюдается интерференция когерентных волн от двух щелей, которые, в свою очередь, освещаются цилиндрической волной от одиночной щели.

8.3. Длина когерентности

В опыте Юнга обеспечивается когерентность (постоянство разности фаз колебаний) двух источников света - параллельных щелей. Естественно, при некогерентных источниках интерференционная картина наблюдаться не может. Но для успешности наблюдения интерференционной картины оказывается важной и временная когерентность. При этом оказывается более удобным говорить о длине когерентности. Она опре-

деляется как характерное время, в течение которого фаза колебаний волны остается постоянной, умноженное на скорость света в вакууме.

Действительно, при удалении от центра экрана увеличивается разность хода лучей от источников S' и S''. И если разность хода больше длины когерентности, то мы опять-таки не сможем наблюдать интерференционую картину.

Сделаем такое (достаточно очевидное) утверждение: "чисто" синусоидальных волн в природе не бывает. Ближе всего к такой волне излучение лазера, но и для него длина когерентности конечна, хотя и весьма велика. Но любая реальная волна представляет собой сумму больше или меньше отличающихся по частоте синусоидальных волн.

Интенсивность излучения, таким образом, некоторым образом распределена по оси частот (или длин волн). В этой связи говорят о ширине спектральной полосы, и в вопросе о том, как связана длина когерентности с разностью длин волн нам вновь поможет рассмотрение биений.

Предположим, что волна света при наблюдении интерференции в опыте Юнга представляет собой сумму двух синусоидальных волн. Как мы знаем, амплитуда суммарных колебаний изменяется по закону

$$\xi_0 \cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\, t\right).$$

Следовательно, изменение фазы происходит через время Δt, которое определяется условием

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\Delta t = \pi; \qquad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

и длина когерентности

$$l_{ког} = \Delta t c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}.$$

С другой стороны мы имеем:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}; \qquad \Delta\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

По смыслу длина когерентности - величина положительная. Беря поэтому соответствующие величины по модулю, имеем:

$$l_{ког} = 2\pi c\,\frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Подойдем теперь к этому вопросу с другой стороны. Предположим, мы проводим опыт Юнга с такой волной - суммой волн с близкими частотами. Для них расстояния между минимумами Δx различны:

$$\delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1 = \frac{\lambda_2}{\theta} - \frac{\lambda_1}{\theta} = \frac{\Delta\lambda}{\theta}.$$

На такую величину интерференционный максимум одной длины волны сдвинут по отношению к максимуму другой. Если взять достаточно большое количество максимумов n, то сдвиг равен $n\delta x$ и если он ока-

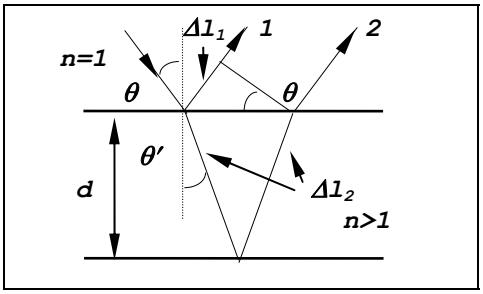
жется равным половине (средней для этих волн) ширины интерференционного максимума, картинка "смажется". Заметив, что для максимума с номером n разность хода лучей равна $n\lambda$, мы получим:

$$n\frac{\Delta\lambda}{\theta} = \frac{\lambda}{2\theta}; \qquad n\lambda\frac{\Delta\lambda}{\theta} = l_{max}\frac{\Delta\lambda}{\theta} = \frac{\lambda^2}{2\theta}; \qquad l_{max} = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}.$$

Таким образом, длина когерентности оказывается величиной порядка разности хода, при которой интерференционная картина уже не наблюдается.

8.4. Линии равного наклона

Рассмотрим теперь задачу об отражении световой волны от плоскопараллельной пластины ("тонкой пленке"). Часть света отражается от верхней поверхности пластины ("первая волна"), часть проникает внутрь ее. После отражения проникшей в толщу пластины волны от нижней ее поверхности и преломления на верхней поверхности ("вторая волна") две эти волны будут распространяться в одном направлении.



Коэффициент отражения прозрачных материалов невелик - порядка нескольких процентов. Поэтому обе волны имеют примерно равную амплитуду. Амплитуда суммарных колебаний в некоторой удаленной зоне наблюдения зависит, естественно, зависит от разности фаз, а эта последняя - от разности хода, которую несложно подсчитать.

После падения на верхнюю поверхность пластины до зоны наблюдения лучи 1 и 2 проходят разные пути. При этом следует учесть такие обстоятельства. При подсчете разности путей, проходимых двумя волнами путь пройденный в веществе необходимо умножать на показатель преломления n - для подсчета разности фаз, собственно важна разность времен распространения волн, а в веществе скорость распространения в n раз меньше. Кроме того при отражении волны от верхней поверхности происходит потеря полуволны - изменение фазы на π.

Подсчитаем длину пути волны 2 в веществе:

$$\Delta l_2 = \frac{2d}{\cos(\theta')}.$$

Далее,

$$\Delta l_1 = 2d\cdot tg(\theta')\cdot \sin(\theta).$$

Таким образом, оптическая разность хода волн 1 и 2

$$\Delta L = n\frac{2d}{\cos(\theta')} - \frac{2d\sin(\theta')\sin(\theta)}{\cos(\theta')} + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= 2d\frac{n - n\sin^2(\theta')}{\sqrt{1-\sin^2(\theta')}} + \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - n^2\sin^2(\theta')} + \frac{\lambda}{2} =$$

$$= 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)} + \frac{\lambda}{2}.$$

При выводе этого выражения мы использовали закон преломления в виде $\sin(\theta) = n \sin(\theta')$.

При наблюдении пластины под некоторым углом мы будем видеть ее либо темной либо светлой. Светлой она будет в том случае, если оптическая разность хода равна целому числу длин волн. Иначе говоря, условие максимума отражения имеет вид

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)} = (k+1/2)\cdot\lambda,$$

где k - целое число.

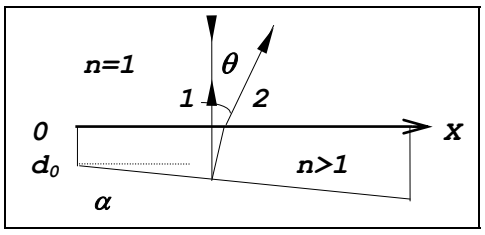
Если в разных точках поверхности пластины углы падения разные, вдоль линий с одинаковым углом падения, удовлетворяющем условию максимума, мы будем наблюдать светлые полосы, между ними - темные. Эти линии и называются линиями равного наклона - имеется ввиду "наклон" падающего луча света. При освещении пластины белым светом мы можем увидеть разные ее части окрашенными - для разных длин волн условие максимума выполняется при разных углах падения.

Обратим внимание - разность хода не должна быть больше длины когерентности. Вот почему (если речь не идет о лазерном излучении, длина когерентности которого велика) линии равного наклона наблюдаются лишь на тонких пленках. Потому этот тип интерференции часто так и называется - *интерференция на тонких пленках*.

Лекция 10

8.5. Линии равной толщины

Как ясно уже из заголовка, речь пойдет о пластинах (тонких пленках), толщина которых непостоянна. И, по существу, здесь не решается какая-то новая задача: механизм интерференции тот же, что и в случае плоскопараллельной пластине. Можно, например, зафиксировать величину угла падения θ, и мы получим готовую формулу, подставив в соответствующее выражение зависимость d от координат. Обычно принимают значение $\theta=0$ - в общем виде выражение громоздко и не представляется полезным.



Для реальной пластины зависимость d от координат может быть какой угодно. Традиционно рассматриваются лишь некоторые частные случаи такой зависимости.

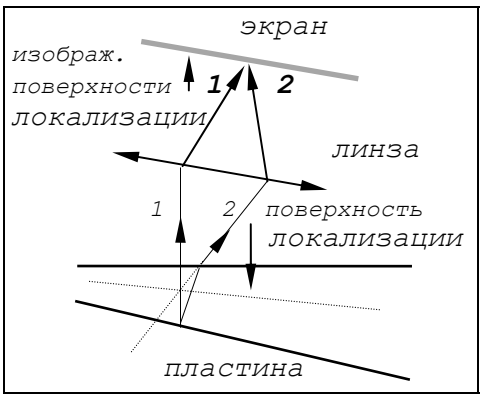
Например, пластина может иметь форму клина. У показанной на рисунке пластины толщина зависит от координаты x:

$$d = d_0 + \alpha x ; \qquad 2(d_0+\alpha x)n = (k+1/2)\lambda .$$

Для соседних максимумов, очевидно, $\Delta k=1$, и мы имеем для ширины интерференционной полосы:

$$2\alpha \Delta x n = \Delta k \lambda = \lambda ; \qquad \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha n} = \frac{\lambda}{\theta} .$$

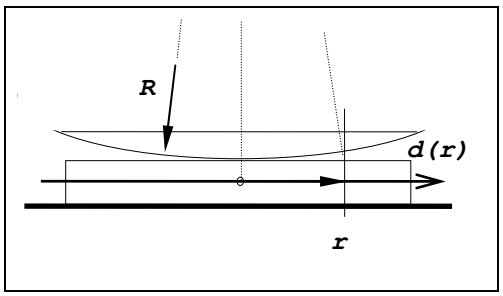
Мы, вроде, получили новую формулу, но, оказывается, она нам знакома. Действительно, после отражения от поверхностей и преломления лучи 1 и 2 расходятся под углом $\theta=2\alpha n$, мы же при анализе интерференции волн от двух точечных источников получили для ширины интерференционной полосы выражение $\Delta x = \lambda/\theta$. Оно оказывается справедливым и в этом случае, но тут появляются некоторые проблемы.



При интерференции волн от двух точечных источников волны реально, "на самом деле" взаимодействуют, складываются на поверхности экрана. Теперь же эти волны (*1* и *2*) после отражения от двух поверхностей расходятся под углом θ. Возникает вопрос, где же они интерферируют друг с другом или, как принято выражаться, где локализованы интерференционныу полосы.

Ответ на этот вопрос поясняется рисунком. Для наблюдения интерференции отраженных от поверхностей пластины (клина) волн используется линза и экран, на котором создается изображение поверхности локализации интерференционных полос. Эта последняя образована точками пересечения продолжений луча *1* (он "начинается" от верхней поверхности пластины) и луча *2* после его преломления.

Другая традиционно рассматриваемая задача - кольца Ньютона. Это также линии равной толщины, но роль пластины здесь играет воздушный промежуток между плоской поверхность стеклянной, например, пластины и выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы.



Пусть угол между вертикалью и прямой, проведенной из центра кривизны к некоторой точке выпуклой поверхности линзы с координатой r, равен α. Тогда

$$d = R\left(1-\cos(\alpha)\right) \approx R\,\frac{\alpha^2}{2}.$$

Показатель преломления в промежутке между стеклянными поверхностями можно считать равным единице. Поэтому условие максимума будет

$$2d = R\alpha^2 \approx \frac{r^2}{R} = \left(k+1/2\right)\lambda\,; \qquad r = \sqrt{\frac{\left(2k-1\right)\lambda R}{2}}\,.$$

При таких значениях радиуса r будут наблюдаться максимумы. Очевидно, минимумы будут при

$$\frac{r^2}{R} = k\lambda\,; \qquad r = \sqrt{\frac{2k\lambda R}{2}}\,.$$

В этих выражениях k - целое. Эти выражения для радиусов колец Ньютона можно объединить в одно:

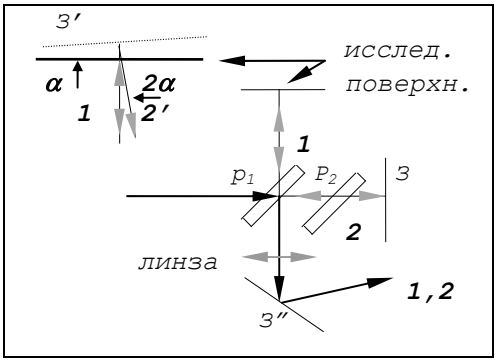
$$r = \sqrt{\frac{k\lambda R}{2}}\,.$$

Теперь нечетным значениям k соответствуют светлые кольца, четным - темные.

8.6. Интерферометры

8.6.1. Интерферометр Линника

Собственно, интерферометр Линника представляет собой слегка видоизмененный интерферометр Майкельсона и может быть назван и так и этак. Мы здесь обсудим не столько его устройство, сколько его применение для определения качества обработки поверхностей.



Основу интерферометра составляют две стеклянные пластины p_1 и p_2 и два зеркала, одним из которых служит исследуемая поверхность.

Нижняя поверхность первой пластины представляет собой *полупрозрачное* зеркало, на котором происходит разделение лучей: часть света (луч **1**) отражается вверх, отражается от исследуемой поверхности и после отражения от нижнего зеркала **З″** направляется в окуляр (на ри-

сунке не показан), через который и наблюдается интерференционная картина.

После прохождения пластины p_1 луч *2* направляется к зеркалу *З*, отражается от него, затем от полупрозрачного зеркала и вместе с лучем *1* направляется к наблюдателю.

Луч *1* после отражения от полупрозрачного зеркала и на обратном пути дважды проходит через пластину p_1, "набирая" тем самым некоторую "лишнюю" разность хода. Для ее компенсации служит пластина p_2, изготовленная из того же материала, что и первая. Разумеется, эту "лишнюю разность хода" можно было бы легко скомпенсировать простым перемещением зеркала, если бы не было дисперсии, зависимости коэффициента преломления от длины волны $n(\lambda)$. Применение компенсирующей пластины p_1 позволяет осуществить такую компенсацию сразу для всех длин волн.

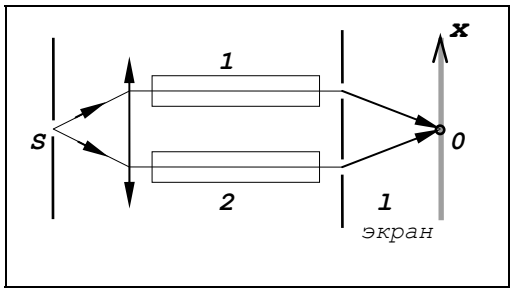
Почему образуется интерференционная картина и как она выглядит помогает понять укрупненный фрагмент рисунка слева вверху. Реальный луч *2* и его отражение от зеркала *З* можно заменить лучем *2'* и его "отражением" от изображения зеркала *З* в полупрозрачном зеркале - *З'*. Это изображение и исследуемая поверхность образуют клин, пластину изменяющейся толщины. Соответственно, через окуляр наблюдаются интерференционные линии равной толщины - прямые, направленные перпендикулярно плоскости рисунка. И эти линии видны искривленными, если исследуемая поверхность не вполне плоская. При "идеально" плоской поверхности это прямые линии.

Ту же мысль можно сформулировать и иначе. При отражении от идеально плоских поверхностей волны остаются плоскими, и фронты волн *1* и *2* составляют между собой угол 2α, если угол между исследуемой поверхностью и изображением зеркала *З'* равен α. Если исследуемая поверхность обработана некачественно, волна *1* уже не будет плоской, интерференционная картина исказится.

Чрезвычайно простой в эксплуатации, такой интерферометр позволяет обнаружить весьма небольшие неровности на исследуемой поверхности - порядка долей длины волны.

8.6.2. Интерферометр Рэлея

Показатель преломления воздуха, как и других газов, при условиях, близких к "нормальным", мало отличается от единицы. Должно быть понятным, что для измерения такой величины показателя преломления необходим достаточно точный метод. Такого рода измерения могут быть произведены с помощью интерферометра Рэлея.

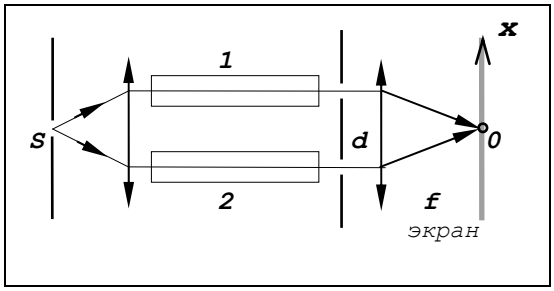


По существу схема получения интерференционной картины в этом случае насильно отличается от классического опыта Юнга. Источником света служит освещаемая достаточно удаленным источником щель *S*, от которой распространяется цилиндрическая волна. С помощью линзы волна преобразуется в плоскую волну: лучи *1* и *2* становятся параллельными. Они проходят через кюветы, длины которых *1* могут быть достаточно велики.

Если показатели преломления газов в кюветах одинаковы, интерференционная полоса (максимум) с нулевой разностью хода помещается в центре экрана при $x=0$. Заметим - выше ее (на рисунке) расположат-

ся линии (максимумы), для которых оптическая длина пути нижнего луча больше.

Если верхняя кювета заполняется газом с несколько большим показателем преломления, оптическая длина пути луча ***1*** на протяжении кюветы станет больше и линия с нулевой разностью хода ("центральная") сместится вверх.



Изображенная на предыдущем рисунке схема интерферометра Рэлея заимствована из задачника Иродова. При такой схеме ширина интерференционной полосы определяется выражением

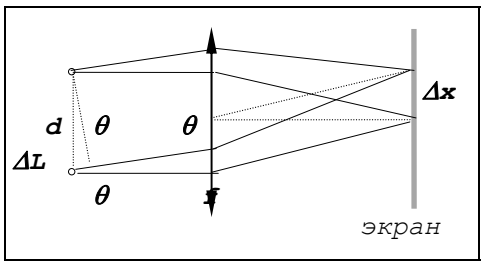
$$\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}; \qquad \theta = \frac{d}{1}.$$

Реальный интерферометр Рэлея устроен несколько иначе: за диафрагмой устанавливается линза, в фокальной плоскости которой и наблюдается интерференционные полосы (с помощью окуляра с достаточным увеличением).

Но тогда угловое расстояние между источниками становится нулевым, интерферировать должны параллельные лучи. Причина образования интерферационной картины становится не очень понятной, непонятно, чем определяется ширина полосы.

Но все это не так загадочно, как может показаться. Два точечных источника представляют собой частный случай периодического расположения источников, рассмотренный нами раньше. Заметив, что мы ограничимся лишь малыми значениями углов θ, повторим для пары источников проведенные ранее рассуждения.

При $\theta=0$, естественно, будет наблюдаться максимум. Следующий максимум будет при значении θ, которое определяется условием



$$\Delta L = d\cdot\theta = \lambda; \qquad \theta = \frac{\lambda}{d}$$

и ширина полосы на экране

$$\Delta x = f\theta.$$

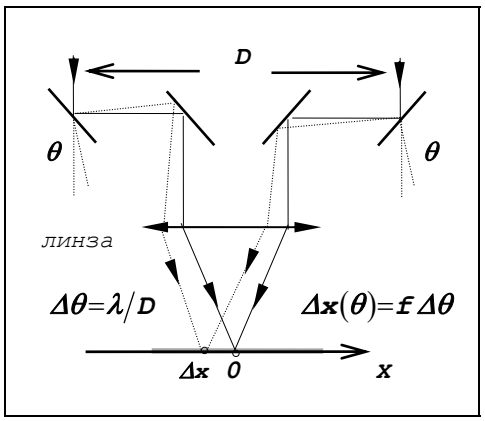
Эти уточнения и расчеты помогут нам понять принцип работы другого интерферометра, о котором речь пойдет ниже. Но обратите внимание на то, что ширина максимума на экране определяется их угловой шириной, которую надо умножить на фокусное расстояние линзы.

8.6.3. Звездный интерферометр Майкельсона

Если угловое расстояние между двумя звездами очень мало, в телескоп они видны как одна звезда. В таком случае говорят о двойных звездах и надо провести специальное наблюдение, чтобы отличить их от звезд одиночных. Для этого используется звездный интерферометр Майкельсона, который позволяет к тому же определить угловое расстояние между звездами.

Устройство звездного интерферометра Майкельсона показано не рисунке. Лучи света, пришедшего от удаленной звезды, отражается от зеркал, разнесенных на достаточно большое расстояние ***D***, затем от двух других зеркал и собираются линзой на экране, помещенном в фо-

кальной плоскости. Разнесенные на расстояние D зеркала можно рассматривать как точечные источники, расстояние между которыми и равно D.



Воспользуемся полученным ранее выражением для углового распределения максимумов излучения света

$$D\sin(\theta) \approx D\theta = k\lambda;$$

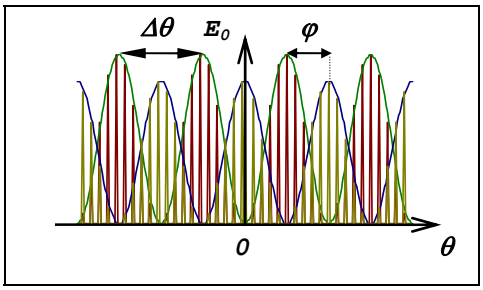
Иначе говоря,

$$D\Delta\theta = \lambda; \qquad \Delta\theta = \frac{\lambda}{D}.$$

На экране будут наблюдаться максимумы на расстояниях $\Delta x(\theta)=f\Delta\theta=f\lambda/D$ друг от друга.

Если наблюдаются две близкие звезды, лучи света от которых приходят под малым углом φ, то на экране будут наблюдаться две интерференционные картины, сдвинутые по отношению друг к другу на расстояние $\Delta x(\varphi)=f\varphi$. Измерение углового расстояния φ между звездами производится следующим образом.

При изменении величины D изменяется $\Delta x(\Delta\theta)$. Несложно догадаться, что при $\Delta x(\theta)/2=\Delta x(\varphi)$ видимость интерференционной картины ухудшится или она вообще не будет наблюдаться. Это позволяет определить угловое расстояние между звездами:

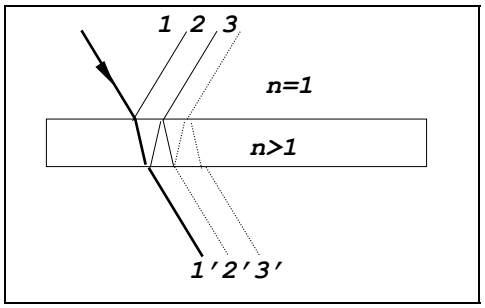


$$\frac{1}{2} f \frac{\lambda}{D} = f\varphi; \qquad \varphi = \frac{\lambda}{2D}.$$

На рисунке показано именно такое взаимоположение интерференционных картин, интенсивность излучения одной из звезд несколько больше. При изменении расстояния между зеркалами изменяется величина $\Delta\theta$.

Таким способом можно определить весьма малые угловые расстояния φ.

8.6.4. Интерферометр Фабри-Перо



Интерференция лучей отразившихся от поверхностей плоскопараллельной пластины называется двухлучевой. И для такого названия имеется основание.

Коэффициент отражения границы стекло - воздух $\rho=I_1/I_0$ невелик, несколько процентов. Обозначив интенсивность падающего луча как I_0, для интенсивностей других лучей мы получим такие значения:

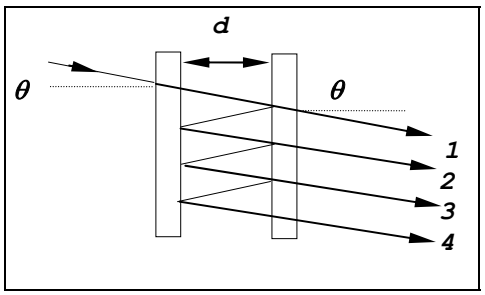
$$I_1 = I_0\rho; \qquad I_2 = I_0(1-\rho)^2\rho; \qquad I_3 = I_0(1-\rho)^2\rho^4;$$
$$I_{1'} = I_0(1-\rho)^2; \qquad I_{2'} = I_0(1-\rho)^2\rho^2; \qquad I_{3'} = I_0(1-\rho)^2\rho^4.$$

Получаются эти выражения таким образом. Если коэффициент отражения ρ, то коэффициент прохождения, как это следует из закона сохранения энергии, равен $(1-\rho)$. При определении интенсивности каждого луча интенсивность I_0 следует умножить на коэффициент отражения и на коэффициент прохождения в степени, равной числу отражений и пересечения границы раздела соответственно. При малом коэффициенте отражения получается поэтому для отраженных и прошедших через пластинку лучей:

$$I_1 \approx I_2; \qquad I_3 << I_2;$$
$$I_{3'} << I_{2'} << I_{1'}.$$

Поэтому при сложении отраженных лучей мы учитываем только два луча - **1** и **2**, интенсивности которых различаются несильно. Поэтому интенсивность в минимумах близка к нулю.

В проходящем свете также будет наблюдаться интерференционная картина, но из-за быстрого уменьшения интенсивности участвующих в интерференции лучей отношение интенсивности в максимуме и в минимуме различаются незначительно.



Устройство интерферометра Фабри-Перо показано на рисунке. Роль пластинки играет воздушный промежуток между двумя прозрачными пластинами, на внутренних поверхности которых напылен тонкий слой металла. Благодаря этому достигается большое значение коэффициента отражения ρ - теперь он отличается от единицы лишь на несколько процентов, а коэффициент прохождения $(1-\rho)$ оказывается малым. Это существенно изменяет соотношения между интенсивностями лучей:

$$I_1 >> I_2 \approx I_3;$$
$$I_{1'} \approx I_{2'} \approx I_{3'}.$$

При таких соотношениях при обсчете углового распределения интенсивности проходящего света необходимо учитывать много (все) проходящие через интерферометр лучи. В этом случае интерференция называется многолучевой.

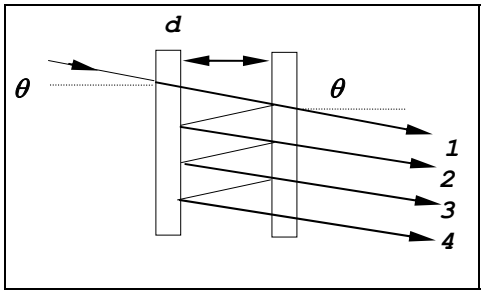
Поскольку при прохождении прозрачных пластин энергия сохраняется, минимуму в отраженном свете должен соответствовать максимум в свете проходящем. Наконец, поскольку в промежутке между пластинами показатель преломления (воздуха) можно считать равным единице, мы получаем такое условие для максимума в проходящем свете:

$$2d\sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = 2d\cos(\theta) = k\lambda; \qquad \cos(\theta) = \frac{k\lambda}{2d}.$$

При практическом использовании интерферометра Фабри-Перо угол θ мал, а расстояние между пластинами d велико (порядка нескольких сантиметров). Так что длина когерентности световой волны $\lambda^2/\delta\lambda$ должна быть достаточно большой.

Лекция 11

8.6.5 Интерферометр Фабри-Перо. Угловое распределение амплитуды проходящей волны



На своем пути каждый последующий из пронумерованных лучей испытывает два дополнительных отражения от внутренних поверхностей пластин. Стало быть, их интенсивности различаются в ρ^2 раз. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды и поэтому

$$\frac{I_m}{I_{m+1}} = \rho^2 ; \qquad \frac{E_m}{E_{m+1}} = \rho .$$

Далее, разность оптических путей соседних лучей равняется $2d\cos(\theta)$ и разность фаз их колебаний в удаленной точке наблюдения

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d\cos(\theta) .$$

Таким образом, для амплитуды суммарных колебаний мы имеем выражение:

$$E = \sum_{m=1}^{\infty} E_1 \rho^{m-1} \cos\left(\omega t - (m-1)\Delta\varphi\right) .$$

Начальную фазу колебаний первого луча мы положили равной нулю.

Для сложения этих колебаний перейдем к комплексным переменным - добавим мнимую часть, памятуя, что физический смысл имеет лишь реальная часть суммы, которую мы получим:

$$\hat{E} = \sum_{m=1}^{\infty} E_1 \rho^{m-1} \left[\cos\left(\omega t - (m-1)\Delta\varphi\right) + i\cdot\sin\left(\omega t - (m-1)\Delta\varphi\right)\right] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} E_1 \rho^{m-1} \exp\left[i\left(\omega t - (m-1)\Delta\varphi\right)\right] = E_1 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{m-1} \exp\left[-i(m-1)\Delta\varphi\right] .$$

Итак, нам надо найти сумму членов бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q=\rho e^{-i\Delta\varphi}$. Таким образом,

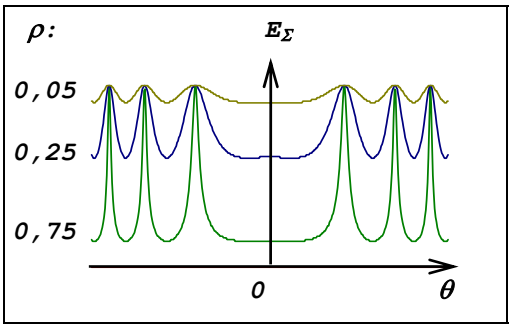
$$\hat{E} = \frac{E_1 e^{i\omega t}}{1 - \rho e^{-i\Delta\varphi}} .$$

Амплитуда суммарных колебаний равна модулю комплексного значения $\hat{E}$:

$$E_\Sigma = \left|\hat{E}\right| = \sqrt{\hat{E}\hat{E}^*} = \frac{E_1}{\sqrt{\left(1-\rho e^{-i\Delta\varphi}\right)\left(1-\rho e^{i\Delta\varphi}\right)}}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, произведем перемножение скобок под квадратным корнем в знаменателе:

$$\begin{aligned}&\left(1 - \rho\cos(\Delta\varphi) + i\cdot\rho\sin(\Delta\varphi)\right)\left(1 - \rho\cos(\Delta\varphi) - i\cdot\rho\sin(\Delta\varphi)\right) = \\ &= \left(1 - \rho\cos(\Delta\varphi)\right)^2 + \rho^2\sin^2(\Delta\varphi) = \\ &= \left(1 + \rho^2\right) - 2\rho\cos(\Delta\varphi).\end{aligned}$$



Вспомним, что

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2d\cos(\theta).$$

Таким образом,

$$E_\Sigma = \frac{E_1}{\sqrt{\left(1+\rho^2\right) - 2\rho\cos\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\cos(\theta)\right)}}.$$

Как и ожидалось, с увеличением коэффициента отражения глубина минимумов увеличивается. Одновременно уменьшается ширина интерференционных полос. Предвидеть этот результат было не так просто.

9. Дифракция Фраунгофура

Дифракция рассматривает процессы отклонения направления распространения света от прямолинейного при встрече с некоторыми препятствиями или при отражении от них. В случае дифракции Фраунгофера рассматривается падение на препятствие плоской волны (бесконечно удаленный источник света) и подразумевается, что зона наблюдения удалена от препятствия на достаточно большое расстояние (находится на бесконечности). Коротко говоря, это “дифракция в параллельных лучах”.

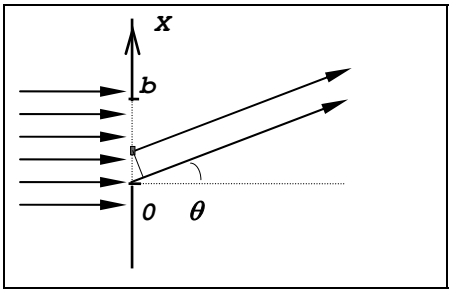
Как Вы увидите, основные задачи дифракции Фраунгофера мы, собственно, уже решили. Просто мы говорили о волнах вообще, а словом дифракция обычно обозначают именно оптические явления, поведение в том или ином случае световой (электромагнитной) волны.

9.1. Дифракция на щели

Ранее мы получили такое выражение для углового распределения амплитуды от системы точечных источников, от “цепочки” источников длиной **b**:

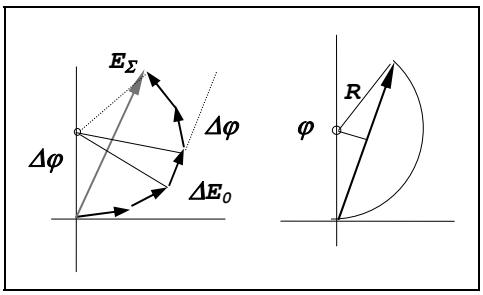
$$A(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi b\sin(\theta)}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b\sin(\theta)}{\lambda}}.$$

Ввиду особой важности да и сложности понимания этого результата получим его еще раз - другим способом.



В связи с рассмотрением явлений дифракции формулируется принцип Гюйгенса-Френеля. Согласно этому принципу элементарный участок волнового фронта считается точечным источником вторичных волн, огибающая которого и является "новым" фронтом волны. В случае дифракции на щели в качестве таких источников выбираются узкие полоски (вдоль щели), которые являются источниками цилиндрических когерентных волн. Электромагнитные колебания в удаленной зоне наблюдения подсчитывается как сумма колебаний волн, пришедших от таких источников.

На этот раз мы проведем их сложение с помощью векторной диаграммы. Амплитуда вторичной волны пропорциональна ширине элементарной полоски: $\Delta E_0 = E_0\,\Delta x/b$, а начальная фаза колебаний зависит от координаты выбранной полоски: $\varphi(x) = 2\pi x\,\sin(\theta)/\lambda$. Таким образом, разность фаз колебаний от соседних элементарных полосок шириной Δx составит $\Delta\varphi = 2\pi\Delta x\,\sin(\theta)/\lambda$. На такой угол будут повернуты по отношению друг к другу соответствующие векторы на фазовой диаграмме.



При стремлении ширины полоски Δx к нулю образованная элементарными векторами ломаная превращается в дугу окружности радиуса R, угловой размер дуги

$$\varphi = \frac{2\pi b\,\sin(\theta)}{\lambda}.$$

При изменении угла θ угловые размеры дуги изменяется. Но длина дуги, равная сумме модулей (длин) элементарных векторов, считается постоянной:

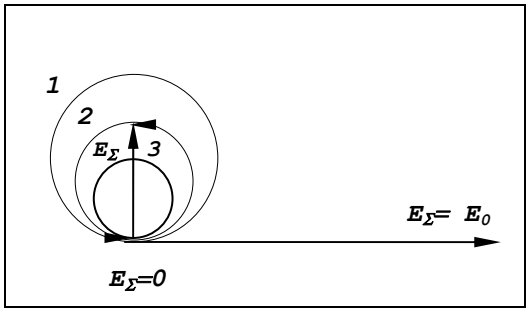
$$\sum \Delta E_0 = \sum E_0\,\frac{\Delta x}{b} = E_0.$$

Это позволяет нам определить радиус дуги и амплитуду суммарных колебаний (см. рисунок) при произвольном θ:

$$R = \frac{E_0}{\varphi}; \qquad E_\Sigma = 2R\,\sin(\varphi/2) = E_0\,\frac{\sin(\pi b\,\sin(\theta)/\lambda)}{\pi b\,\sin(\theta)/\lambda}.$$

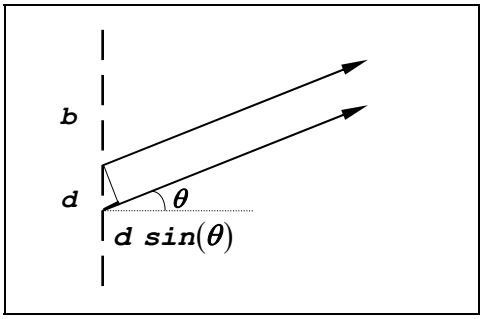
Как видите, мы получили то же выражение, что и раньше. Но векторная диаграмма позволяет нам нагляднее представить причины обращения амплитуды суммарных колебаний в нуль и достижение максимумов.

При $\varphi = 2\pi$ дуга превращается в окружность, амплитуда суммарных колебаний равна нулю. Максимумы достигаются при $\varphi = 0$ и, (приблизительно) при $\varphi = (2k+1)\pi$.



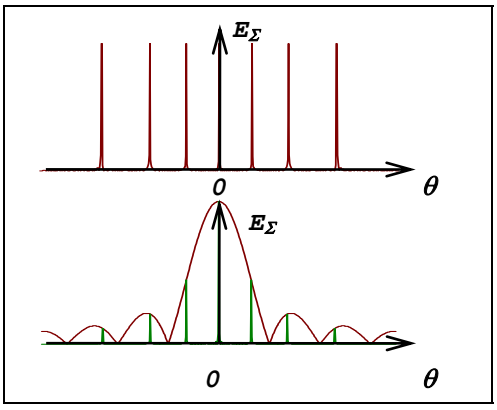
Эти ситуации показаны на рисунке. При $\theta=0$ все элементарные векторы лежат на прямой, амплитуда суммарных колебаний максимальна и равна E_0. По мере увеличения угла наблюдения θ и, соответственно, угла φ амплитуда колебаний уменьшается и при $\varphi=2\pi$ обращается в нуль. Затем дуга скручивается в спираль и максимум достигается приблизительно в тот момент, когда она представляет собой полторы окружности (**2**, $\varphi=3\pi$). При этом амплитуда колебаний равна примерно диаметру окружности: $E_0 = 1{,}5 \cdot \pi E_\Sigma$. Затем спираль становится "двойной окружностью", амплитуда колебаний снова обращается в нуль (**3**) и т.д.

9.2. Дифракционная решетка



Такая решетка состоит из большого числа щелей шириной **b**, расположенных на расстоянии **d** друг от друга. Разумеется, $b<d$. Каждая щель может рассматриваться как источник цилиндрических волн, вызывающих электромагнитные колебания в некоторой удаленной зоне наблюдения. В этом случае оказывается справедливым результат, который мы получили для периодически расположенных точечных источников:

$$\xi_{0\Sigma} = \xi_0 \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}; \qquad \varphi = 2\pi \frac{d \sin(\theta)}{\lambda}.$$



Но этот результат мы получили для изотропных точечных источников, интенсивность излучения которых не зависит от направления. Теперь у нас источниками являются щели, у которых амплитуда волны существенно зависит от направления наблюдения. Поэтому в выражение для углового распределения амплитуды волны, рождаемой периодически расположенными источниками, надо вставить угловое распределение амплитуды волны самих источников, щелей:

$$E_\Sigma = E_0 \frac{\sin(\pi b \sin(\theta)/\lambda)}{\pi b \sin(\theta)/\lambda} \cdot \frac{\sin(N\pi d \sin(\theta)/\lambda)}{\sin(\pi d \sin(\theta)/\lambda)}.$$

Это довольно сложное выражение, но смысл его должен быть понятен. Он поясняется и рисунком. Вверху показано угловое распределение амплитуды волны, излучаемой изотропными источниками. Внизу - угло-

вое распределение амплитуды после прохождени светом решетки. Там же показано угловое распределение амплитуды волны, излучаемой щелью. По рисунку можно оценить отношение ширины щели к периоду решетки b/d.

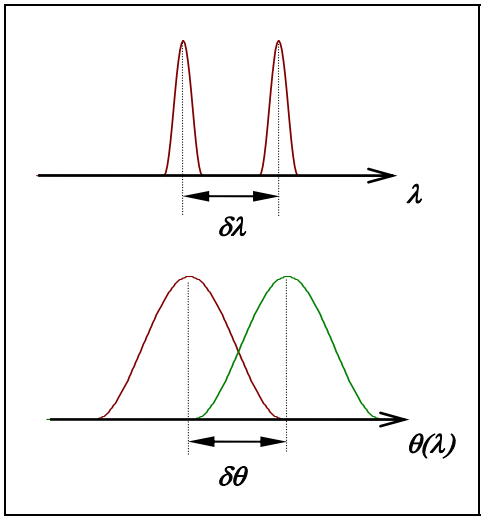
9.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Очевидно, что дифракционная решетка может быть использована для разворачивания падающего на нее света в спектр, когда угловое положение максимума зависит от длины волны λ. При $\theta=0$ наблюдается максимум для всех длин волн. Но (угловые) положения максимумов k-того порядка при $k>1$ различны для разных длин волн. Это следует из условия максимума $d\sin(\theta_k)=k\lambda$. То, как "быстро" изменяется угол θ, под которым наблюдается максимум, при изменении длины волны определяет *угловую дисперсию* решетки (это - определение термина)

$$D = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos(\theta)}.$$

Как видно, дисперсия возрастает с ростом порядка максимума k и с уменьшением периода решетки d. Обратите внимание, что в знаменателе стоит $\cos(\theta)$, который уменьшается с увеличением угла.

Естественно, чем больше угловая дисперсия, тем успешнее могут быть разрешены близкие по длине линии спектра, наблюдаться как отдельные линии. Попробуем разобраться с вопросом разрешения линий детальнее.



Пусть в спектре имеется пара линий с близкими длинами волн λ_1 и λ_2, разность длин волн $\delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1$. Любая линия обладает некоторой "естественной" шириной, которая предполагается меньше разности длин вол самих линий: $\delta\lambda_1\approx\delta\lambda_2<\delta\lambda$.

Но даже если бы ширина каждой линии была равна нулю, при наблюдении излучения после дифракционной решетки каждой линии будет отвечать некоторая полоса (на рисунке внизу). Она определяется свойствами самой решетки и для разрешения близких по длине волны линий эта ширина должна быть меньше или равна $D\delta\lambda = \delta\theta$.

В физике вводится величина, называемая разрешающей способностью:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

В этом выражении $\delta\lambda$ означает минимальную разность длин волн линий, которые могут наблюдаться в спектре как отдельные линии, и величина R является характеристикой спектрального прибора (например, дифракционной решетки).

Подсчитаем разрешающую способность дифракционной решетки. Для этой цели используется критерий Рэлея: линии считаются разрешенны-

ми, наблюдаются как отдельные линии, если при разложении в спектр максимум одной линии совпадает с минимумом другой. Ширина дифракционной полосы (отвечающей определенной линии) определяется положением ближайших к максимуму минимумов. Положение минимумов, в свою очередь, определяется выражениями

$$d\sin(\theta) = k'\lambda/N; \qquad k' \neq 0, N, 2N, \ldots$$

Если k' кратно количеству щелей N, то наблюдается максимум - знаменатель второго сомножителя выражения для распределения амплитуды колебаний в удаленной зоне наблюдения обращается в нуль:

$$E_\Sigma = E_0 \frac{\sin\left(\pi b \sin(\theta)/\lambda\right)}{\pi b \sin(\theta)/\lambda} \cdot \frac{\sin\left(N\pi d \sin(\theta)/\lambda\right)}{\sin\left(\pi d \sin(\theta)/\lambda\right)}.$$

Таким образом, максимум первой волны наблюдается при условии $d\sin(\theta) = k'\lambda/N = k\lambda;\ \left(k'=kN\right)$. Потребуем, чтобы при этом же угле наблюдался минимум второй волны:

$$d\sin(\theta) = \left(k'-1\right)\left(\lambda+\delta\lambda\right)/N = \left(\lambda+\delta\lambda\right)\left(k-1/N\right);$$

$$d\sin(\theta) = k\lambda = \left(\lambda+\delta\lambda\right)\left(k-\frac{1}{N}\right) = k\lambda + k\delta\lambda - \frac{\lambda}{N} - \frac{\delta\lambda}{N}.$$

Считая, что $\lambda >> \delta\lambda$ и поэтому пренебреая последним слагаемым в выписанном выражении, получаем:

$$0 = k\delta\lambda - \frac{\lambda}{N}; \qquad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN.$$

Таким образом, разрешающая способность тем выше, чем больше порядок интерференционного максимума, и чем больше количество щелей решетки.

Лекция 12

10. Дифракция на круглом отверстии

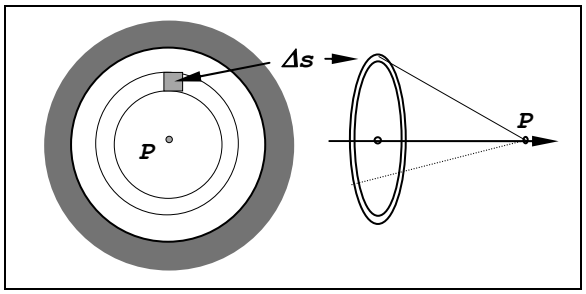
В плане историческом теоретическое исследование явлений дифракции было исключительно важным для утверждения представлений о волновой природе света. Что и говорить, правильные представления в каждой области очень важны для общего правильного представления о Природе. Только в таком случае мы можем успешно использовать явления всякого рода для наших нужд.

В оптике различные приборы по понятным причинам имеют круглое входные отверстия, диафрагмы и проч. И неизбежная дифракция на круглых отверстиях ограничивает возможности этих приборов. При знакомстве, например, с линзой мы ограничивались параксиальными лучами, достаточно узкими пучками света. Лишь при этом условии преломляющие поверхности линзы можно изготавливать сферическими. Но это, естественно, ограничивает возможности изготовленных из таких линз оптических приборов и, в частности, из-за дифракции. А вот, например, для астрономических наблюдений необходимы грандиозно большие входные отверстия, изменяемые метрами. В этом случае задача изготовления телескопа неимоверно усложняется, телескопы с такими отверстиями очень дороги и, соответственно, уникальны.

Вот для некоторого, хотя бы, понимания этих проблем нам и необходимо заняться обсуждением дифракции на круглых отверстиях.

10.1. Зоны Френеля

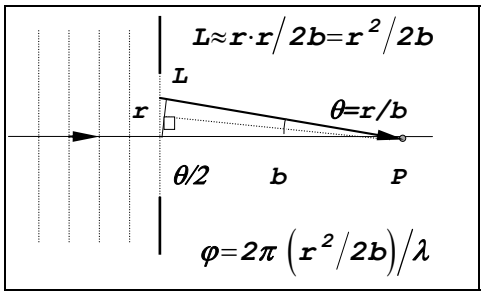
При знакомстве с дифракцией в параллельных лучах (при бесконечных расстояниях до источника света и до зоны наблюдения) их параллельность сильно упрощала математические проблемы необходимых расчетов, хотя результаты и их смысл не становились от этого очень простыми. Теперь нам придется иметь дело со сферическими волнами, их лучи, разумеется, не параллельны друг другу. Это усложняет нужную для расчета математику, большинство задач поэтому мы будем решать приближенно. Но вначале оставим хотя бы расстояние до источника бесконечным - рассмотрим дифракцию *плоской волны* на круглом отверстии.



В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждый элементарный участок фронта Δs может быть рассмотрен как точечный источник сферических волн. Такой участок показан на рисунке. Точка наблюдения P в наших задачах, как правило, будет находиться на оси симметрии на некотором расстоянии от отверстия или от круглой преграды. Разумеется, от различных элементарных участков фронта свет к точке наблюдения будет проходить разные расстояния и при сложении колебаний нам необходимо будет учитывать разности фаз $\delta\varphi$ отдельных колебаний. Но разности фаз $\delta\varphi$, понятно, будут нулевыми, если элементарные участки расположены в пределах тонкого кольца, и тогда (пока мы не перешли к другому кольцу) мы можем просто складывать амплитуды колебаний волн, приходящих от таких участков. Поэтому и сами элементарные участки мы будем выби-

рать в виде тонких колец. Фаза колебаний в точке наблюдения будет зависеть от радиуса такого кольца.

Итак, рассмотрим падение плоской волны на круглое отверстие и проанализируем, как зависит от радиуса отверстия амплитуда суммарных колебаний в точке наблюдения.



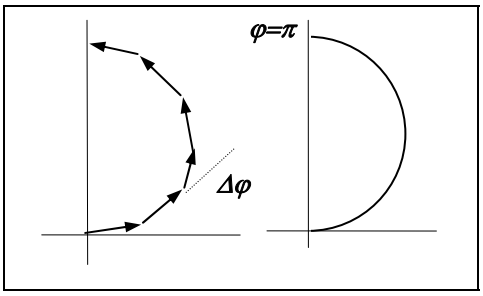
Из рисунка видно, что разность хода лучей от края кольца радиуса r и от центра отверстия

$$L = r\cdot(\theta/2) \approx r^2/2b .$$

Поэтому от кольца с радиусом r колебания будут приходить с запаздыванием по фазе на

$$\varphi(r) = 2\pi \frac{L}{\lambda} = 2\pi \frac{r\cdot(r/2b)}{\lambda} = \frac{\pi r^2}{b\lambda} .$$

С помощью векторной диаграммы мы будем складывать колебания, приходящие в точку наблюдения от тонких колечек толщиной Δr. Соответствующие векторы на фазовой диаграмме будут повернуты по отношению друг к другу на угол



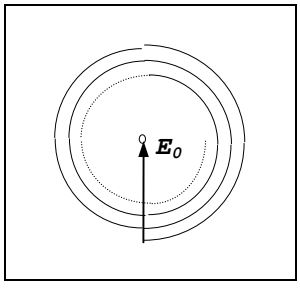
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi r}{b\lambda} \Delta r .$$

При достаточно большом радиусе будет

$$\varphi = \Sigma\Delta\varphi = \frac{\pi r^2}{b\lambda} = \pi .$$

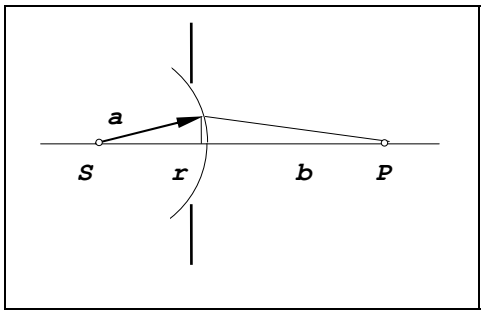
Соответствующий радиус r_1 называется (внешним) радиусом первой зоны Френеля. При дальнейшем увеличении радиуса, естественно, величина φ будет увеличиваться. Из условия $\varphi=k\pi$ мы получаем выражение для радиуса k-й зоны Френеля:

$$\varphi = \frac{\pi r_k^2}{b\lambda} = k\pi ; \qquad r_k = \sqrt{k\lambda b} .$$



Мы уже достаточно много работали с векторными диаграммами, и должно быть понятно, что при дальнейшем увеличении радиуса отверстия (по сравнению с r_1) амплитуда суммарных колебаний в точке наблюдения, пропорциональная длине отрезка (вектора), соединяющего начало и конец дуги, будет уменьшаться. Она достигнет минимума, когда радиус отверстия достигнет внешнего радиуса второй зоны Френеля. Но в отличии от задачи о колебаниях волны, излучаемой щелью при дифракции Фраунгофера, дуга не замкнется в окружность, мы получим некоторую скручивающуюся спираль. Длина вектора, проведенного от начала к центру спирали, дает, очевидно, амплитуду падающей волны - скручивание спирали к центру соответствует бесконечно большому радиуса отверстия, когда дифракция не наблюдается.

Подобная спираль, которую называют спиралью Френеля, получается и в том случае, когда на отверстие падает сферическая волна конечного радиуса a. Выражение для радиусов зон Френеля в этом случае, естественно, иное.



На рисунке a - радиус фронта волны, b - расстояние от фронта до точки наблюдения P. Таким образом, расстояние от источника света S до точки наблюдения вдоль оси равно $(a+b)$.

Подсчитаем теперь длину некоторого произвольного луча. Как и раньше, рассматриваем лишь параксиальные лучи. При таком ограничении наши выражения будут приближенными.

Нижний катет прямоугольного треугольника, образованного радиусом фронта a, осью системы и радиусом r некоторого кольца на фронте волны, будет равен

$$a\left(1 - \cos\left(r/a\right)\right) \approx a - a\left(r^2/2a^2\right) \approx a - r^2/2a\,.$$

Расстояние от источника света до края кольца и от него до точки наблюдения будет равен

$$a + \sqrt{\left(b + \frac{r^2}{2a}\right)^2 + r^2} =$$

$$= a + \sqrt{b^2 + \frac{br^2}{a} + \frac{r^4}{4a^2} + r^2} \approx a + b\sqrt{1 + \left(\frac{b+a}{ab^2}\right)r^2} \approx$$

$$\approx a + b + \frac{a+b}{2ab}\,r^2\,.$$

При преобразованиях мы пренебрегли слагаемым с четвертой степенью r и воспользовались приближенным равенством $\left(1+\varepsilon\right)^n \approx 1+n\varepsilon$.

Таким образом, разность хода "прямого" луча от S к точке наблюдения P и луча, проходящего через край кольца радиуса r

$$L = \frac{a+b}{ab}\,r^2,$$

и разность фаз колебаний волн, проходящим по этим путям,

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{a+b}{2ab}\,r^2 = \pi\,\frac{a+b}{\lambda ab}\,r^2\,.$$

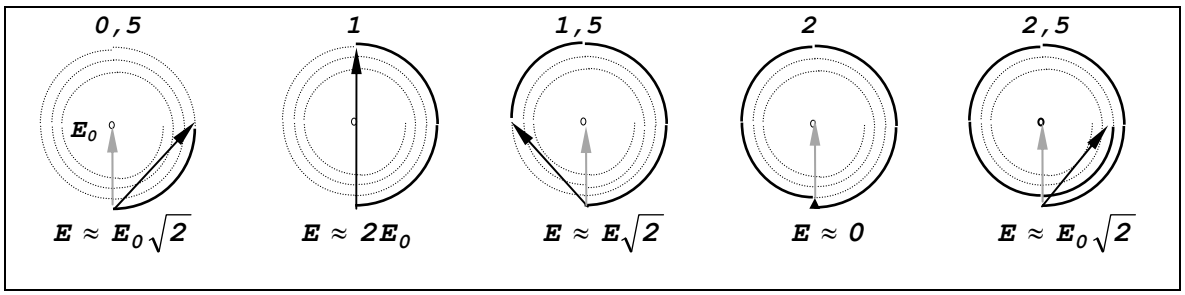
Наконец, из условия $\varphi = k\pi$ получаем для внешнего радиуса k-й зоны Френеля выражение:

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}}\,.$$

Естественно, при $a \to \infty$ это выражение переходит в полученное нами ранее выражение для случая падения на отверстие плоской волны.

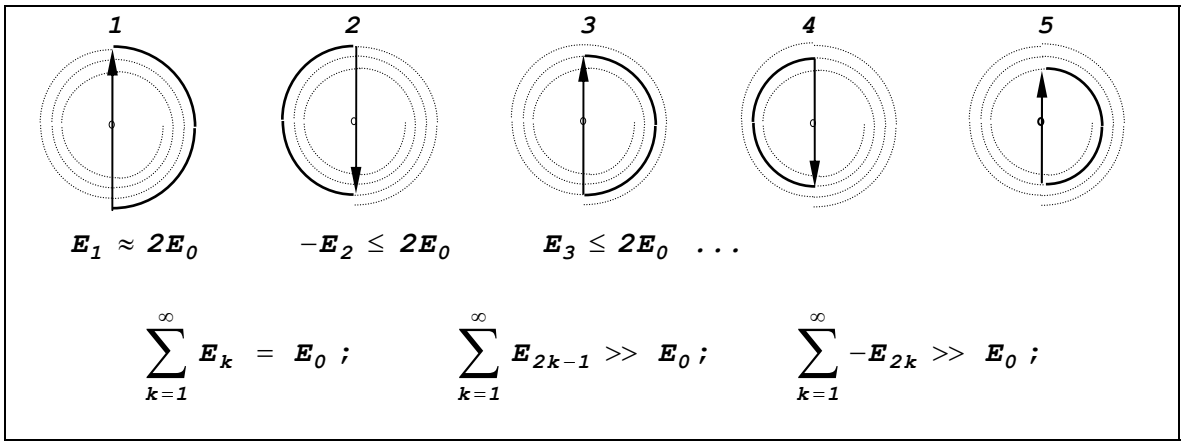
10.2. Обсуждение полученных результатов. Зонная пластинка

Попробуем разобраться, к каким эффектам приводит дифракция на круглом отверстии. При этом не будем ни на минуту забывать, что спираль Френеля состоит из элементарных векторов, которые, соответственно, представляют колебания от элементарных колечек круглого фронта падающей волны. Вся спираль представляет колебания от полностью открытого фронта $(k \to \infty)$, если открыта часть зон Френеля, "реализуется" лишь часть спирали. Амплитуда суммарных колебаний представляется длиной вектора, соединяющего начало спирали и ее конец.



Проиллюстрируем эти слова. На рисунке показаны случаи, когда открыта половина первой зоны, первая зона, полторы зона, две и две с половиной. Иначе говоря, когда радиус круглого отверстия равен радиусу половине первой зоны Френеля, радиусу первой зоны и т.д.

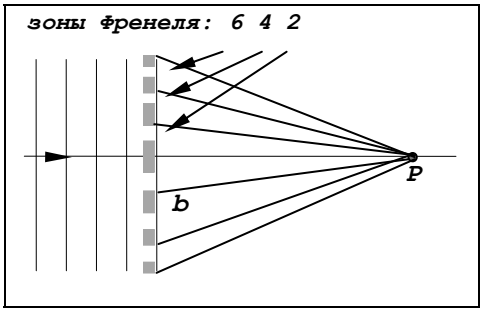
Витки спирали для первых зон Френеля им будем считать окружностями. Поэтому на рисунке выписаны такие значения амплитуды суммарных колебаний E. Подсчет амплитуд колебаний производится приближенно, но для нас важно понимание причин изменения амплитуд при изменении радиуса отверстия, хотя бы и за счет некоторого снижения точности.



При суммировании амплитуд колебаний от первой, второй и т.д. зон Френеля мы должны получить амплитуду E_0. Но если бы мы складывали только колебания от четных или только от нечетных зон Френеля, мы получили бы колебания с амплитудой, модуль которой намного превосходит величину E_0. Действительно, вместо суммы членов знакопеременного ряда мы бы тогда складывали значения E одного знака.

Технически такое сложение осуществляется с помощью зонной пластинки. Она представляет собой систему непрозрачных концентрических колец, которые закрывают, например, нечетные зоны Френеля. Амплитуда колебаний в точке наблюдения при использовании такой пластинки сильно возрастает.

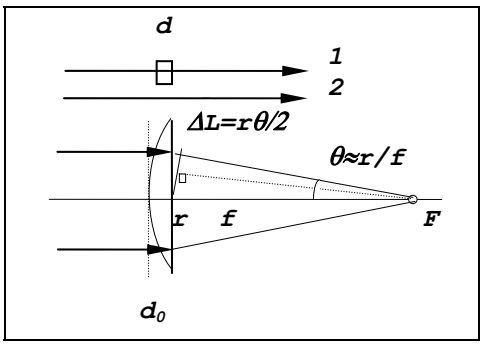
Зонная пластинка действует в этом случае подобно линзе, которая фокусирует свет в некоторой точке. Соответственно, для зонной пластинки может быть введено фокусное расстояние. На рисунке показана зонная пластинка, закрывающая нечетные зоны Френеля. Разность хода нарисованных лучей равна λ, и амплитуда колебаний от открытых зон при одинаковых знаках складываются по модулю. Поэтому и получается большая интенсивность колебаний в точке наблюдения, фокусировка лучей.



Следующим шагом в своего рода совершенствовании зонной пластинки является превращение ее в прозрачную фазовую зонную пластинку. Вместо того, чтобы закрывать, например, нечетные зоны Френеля, мы можем изменять на π фазу приходящих от них колебаний. Тогда амплитуда колебаний в точке наблюдения примерно удвоится. Чтобы достигнуть этого, необходимо изменить для них оптическую длину пут на половину длинны волны, обеспечить выполнение условия $d(n-1) = \lambda/2$, где d - толщина фазовой пластины из материала с показателем преломления n.

10.3. Линза как дифракционный прибор

Фазовая пластинка представляется удивительным прибором. Ее способность фокусировать лучи основана на том, что она изменяет на π фазу колебаний от, например, четных зон Френеля E_{2k}. В отсутствии пластинки эти колебания противоположны по фазе колебаниям от нечетных зон E_{2k-1}, противоположны им по знаку. Естественно, суммарная амплитуда сильно увеличивается, происходит фокусировка. Но у нас имеется еще одна и еще более мощная возможность увеличить амплитуду колебаний - выпрямить сами дуги спирали и вместо хорд складывать длины этих дуг.



Приходящие от элементарных колечек в пределах некоторой зоны Френеля колебания имеют различные фазы, что и проявляется в скручивании элементарных векторов на векторной диаграмме в дугу. Если же обеспечить нужное *плавное* изменение фазы колебаний в пределах отверстия, можно добиться желаемого результата - синфазности колебаний от всех элементарных колечек. Собственно, это и обеспечивается линзой при фокусировке лучей.

Действительно, лучи **1** и **2** проходят одинаковые геометрические пути, но один из них проходит путь d в материале с показателем преломления n. В результате на этом участке он проходит больший оптический путь, появляется оптическая разность хода $\Delta L = (n-1)d$.

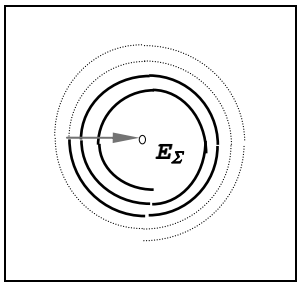
Рассмотрим теперь прохождение луча света через плоско-выпуклую линзу из материала с показателем преломления n. Луч от отмеченной пунктиром плоскости до выпуклой поверхности линзы проходит путь $R\left(1-\cos\left(r/R\right)\right) \approx r^2/2R$ и в материале линзы $d_0 - r^2/2R$. Таким образом, на этом участке оптическая длина пути будет $r^2/2R + n\left(d_0 - r^2/2R\right) = nd_0 - \left(n-1\right) r^2/2R$. С другой стороны от края колечка на плоской стороне линзы до фокуса луч пройдет путь $f + r\cdot\theta/2 \approx f + r^2/2f$. Чтобы в фокусе колебания волн, проходящих по путям всех лучей, складывались, необходимо, чтобы этот путь на зависел от радиуса колечка:

$$\frac{d}{dr}\left[nd_0 - \left(n-1\right)\frac{r^2}{2R} + f + \frac{r^2}{2f}\right] = -r\,\frac{n-1}{R} + r\,\frac{1}{f} = 0\,;$$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}\,.$$

Мы получили прежнее выражение для фокуса линзы, но на этот раз исходя их требования синфазности колебаний волн, приходящих в некоторую точку наблюдения, которая называется фокусом.

10.4. Пятно Пуассона



С помощью спирали Френеля можно получить еще один замечательный результат. Действительно, если на пути сферической волны находится непрозрачное круглое отверстие (любого размера), то оказывается закрытым какое-то число внутренних зон Френеля. Но вклад в колебания в точке наблюдения, находящегося в центре геометрической тени, будут давать остальные зоны. В результате в этой точке должен наблюдаться свет.

Этот результат показался в свое время Пуассону столь невероятным, что он выдвинул его как возражение против рассуждений и расчетов Френеля при рассмотрении дифракции. Однако, когда был проведен соответствующий опыт, такое светлое пятнышко в центра геометрической тени было обнаружено. С тех пор оно носит название пятна Пуассона, хотя он не допускал и самой возможности его существования.

Лекция 13

11.1. Свет поляризованный и неполяризованный. Закон Малюса

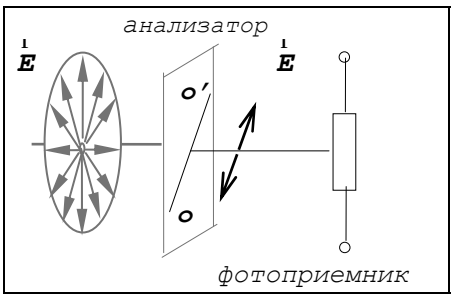
До сих пор при исследовании дифракции или интерференции мы занимались волнами без учета их поляризации. Можно сказать, что в случае волн поперечных, мы считали их поляризованными одинаково. Только в этом случае с помощью векторной диаграммы можно складывать амплитуды колебаний, т.е. в случае, если они происходят по одному направлению.

Теперь нам нужно сосредоточиться на поперечных волнах, при сложении которых может оказаться существенной поляризация волны.

Поляризация определяется тем, как направлен, например, вектор электрического поля в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны.

Вектор $\vec{E}$ перпендикулярен направлению распространения волны, но это направление может тем или иным способом изменяться. Свет называют поляризованным, если наблюдается некоторая регулярность такого изменения.

В естественном свете это направление изменяется случайным образом. Такой свет называют неполяризованным.



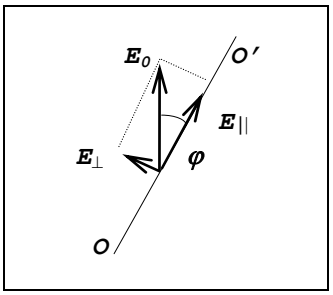
Каким образом можно судить о поляризованности света? Имеются приборы, которые пропускают только свет с определенным направлением вектора $\vec{E}$ (в зависимости от назначения их называют поляризаторами или анализаторами). Если свет неполяризован, то при повороте анализатора вокруг горизонтальной оси интенсивность света, воспринимаемого фотоприемником, не изменяется: амплитуда колебаний электрического вектора остается неизменной.

Кроме света неполяризованного выделяют частично поляризованный свет. В этом случае направление вектора электрического поля также изменяется хаотически, но имеется некоторое направление, при котором в среднем амплитуда колебаний больше. Для такого случая вводится понятие степени поляризации: вращая анализатор, определяют значения максимальной и минимальной интенсивности, воспринимаемой фотоприемником. Степень поляризации определяется выражением:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Частично поляризованным может быть смесь неполяризованного и линейно поляризованного света.

Если неполяризованный свет проходит через поляризатор, он становится линейно или плоско поляризованным светом. В этом случае колебания вектора $\vec{E}$ происходят в некоторой плоскости, проходящей через направление распространения световой волны, которая и называется плоскостью поляризации. При этом, очевидно, $I_{min}=0$ и степень поляризации равна единице.



Для линейно поляризованного света справедлив закон Малюса. Пусть колебания электрического вектора происходят в вертикальной плоскости и амплитуда колебаний равна E_0. Если ось анализатора повернута не угол φ по отношению к направлению поляризации, к фотоприемнику пройдет свет с амплитудой

$$E_{||} = E_0 \cos(\varphi).$$

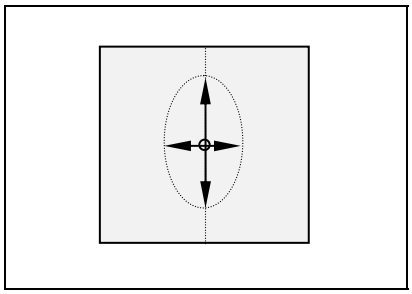
Поскольку интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, мы получаем закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2(\varphi).$$

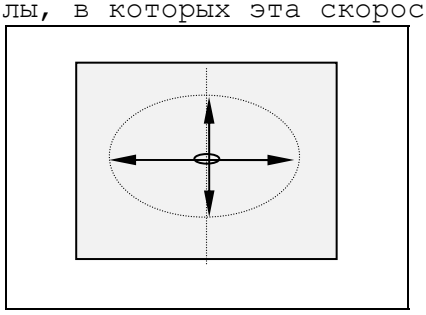
Свет с амплитудой $E_\perp$ задерживается анализатором.

11.2. Одноосные кристаллы

Кристаллы не обязательно или даже редко бывают изотропными. В частности, скорость распространения света в кристалле может зависеть от направления (плоскости) колебаний вектора электрического поля. Простейшим случаем является одноосный кристалл.



Если внутри такого кристалла имеется точечный источник света, волновой фронт (лучевая поверхность) будет иметь форму эллипсоида вращения. Дело в том, что скорость распространения в таком кристалле зависит от ориентации направления поляризации света по отношению к некоторому направлению - оси кристалла. В показанном на рисунке случае положительного одноосного кристалла скорость распространения света максимальна, если направление поляризации перпендикулярно оси. Существуют также отрицательные одноосные кристаллы, в которых эта скорость минимальна.

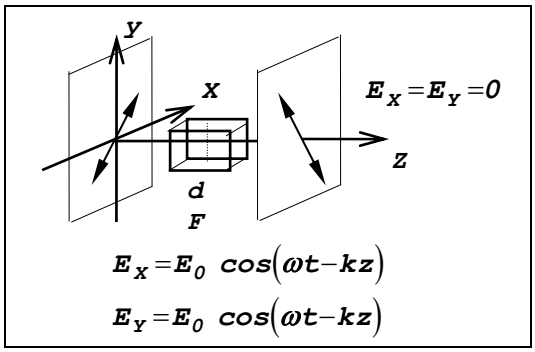


Вообще говоря эту поверхность удобно называть фронтом - колебания во всех ее точках происходят с одинаковой фазой. Но лучше называть ее лучевой поверхностью: нарисованные в определенном масштабе, лучи, вышедшие из точки, где расположен источник света, будут равны по длине расстоянию до этой поверхности. Но при этом они не будут, естественно, перпендикулярны к этой поверхности.

Для таких кристаллов вводятся понятия обыкновенного и необыкновенного лучей. Обыкновенным лучем называется такой, направление поляризации которого перпендикулярно оптической оси. Соответственно, вводится два показателя преломления: обыкновенного луча n_o и необыкновенного n_e. В положительном кристалле $n_o < n_e$. Это соответствует тому, что скорость распространения света вдоль оси кристалла (обыкновенный луч) больше скорости в поперечном направлении, когда колебания вектора электрического поля направлены вдоль оси кристал-

ла. Для отрицательного кристалла соотношение показателей преломления обратное.

11.3. Скрещенные поляризаторы



Эксперименты с одноосными кристаллами обычно проводятся с использованием скрещенных поляризаторов. При этом оси поляризаторов обычно направляются под углом 45^0 к вертикали. Соответственно, и направление плоскости поляризации составляет 45^0 к вертикали.

Амплитуды колебаний ***x***- и ***y***-составляющих электрического поля одинаковы при таких условиях. Естественно, свет через такую систему не проходит.

Иное дело, если между скрещенными поляризаторами помещается кристалл, оптическую ось которого обычно направляют вертикально.

Луч, вдоль которой распространяется волна $E_X=E_0\ cos(\omega t-kz)$ является обыкновенным - направление вектора электрического поля для него перпендикулярно оптической оси, показатель преломления n_o. У другого луча $E_Y=E_0\ cos(\omega t-kz)$ направление поляризации совпадает с осью кристалла и показатель преломления n_e. Эти лучи мы будем называть обыкновенным и необыкновенным. Заметим еще раз, что различаются эти лучи направлением плоскости поляризации по отношению к оси кристалла. Заметим также, что направление поляризации это ни что иное, как направление действующей на электроны вещества силы. Значения показателей преломления различны потому, что собственные частоты колебаний электронов вдоль оси и в поперечном направлении различны.

Из-за различия показателей преломления внутри кристалла эти лучи, двигаясь параллельно, пройдут разные оптические пути - $n_o d$ и $n_e d$, возникнет разность фаз колебаний. Проходящий через систему скрещенных поляризаторов свет можно зафиксировать помещенным за системой поляризаторов фотоприемником. Результат определяется тем, какой будет поляризация после прохождения светом поляризатора и кристаллической пластинки.

Рассмотрим подробнее, какие здесь возможны случаи.

При прохождении светом одноосного кристалла у обыкновенного и необыкновенного лучей фазы изменятся таким образом:

$$\varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - 1); \qquad \varphi_e = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_e - 1).$$

Разность фаз колебаний в этих лучах после прохождения кристалла (но перед вторым поляризатором!) будет

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e).$$

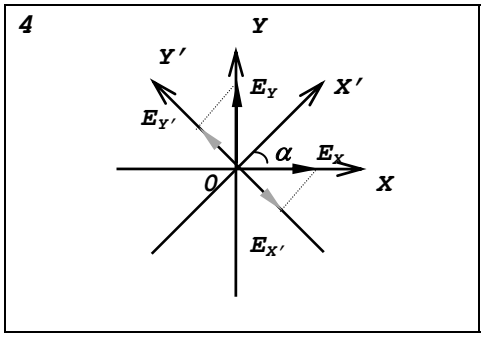
И будем еще помнить, что это разность фаз колебаний ***y***- и ***x***-колебаний электрического вектора волны после прохождения кристалла.

Естественно, не представляет особого интереса случай, когда $\Delta\varphi = 2k\pi$ - в этом случае вид поляризации не изменится, свет через скрещенные поляризаторы проходить не будет. Если вращать второй поляризатор, используя его как анализатор, интенсивность в зависимости от угла поворота будет изменяться по закону Малюса.

Изменяя толщину пластинки, можно добиться выполнения условия $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. В этом случае ***y-*** и ***x-***колебаний электрического вектора волны (волн) будут происходить в противофазе. Это означает поворот плоскости поляризации света на 90^0. Свет не будет задерживаться вторым поляризатором, с ось которого теперь совпадает направление поляризации. Но при повороте анализатора опять-таки будет выполняться закон Малюса.

Возникновение при прохождение пластинки разности фаз $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ означает, что один из лучей отстал от другого на нечетное количество полуволн - такая кристаллическая пластинка называется "пластинкой в пол волны".

Круговой после прохождения кристаллической пластинки поляризация будет при условии $\Delta\varphi = 2k\pi \pm \pi/2$. Такая пластинка по понятным причинам называется пластинкой "в четверть волны".



Наконец, при произвольной толщине пластинки поляризация будет, вообще говоря, эллиптической. При этом оси эллипса составят угол 45^0 с осью кристалла. Свяжем параметры эллипса с толщиной и показателями преломления n_0 и n_e кристаллической пластинки.

Запишем колебания электрического вектора световой волны после прохождения кристаллической пластинки:

$$E_X = E_0 \cos(\omega t+\varphi_e);\quad E_Y = E_0 \cos(\omega t+\varphi_o).$$

Проведя проецирование этих составляющих на оси повернутой на угол $\alpha = 45^0$ системы координат, мы получим:

$$E'_X = E_0 \cos(\omega t+\varphi_e)\cos(\alpha) + E_0 \cos(\omega t+\varphi_o)\sin(\alpha) =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\cos(\omega t+\varphi_e) + \cos(\omega t+\varphi_o)\right);$$

$$E'_Y = -E_0 \cos(\omega t+\varphi_e)\sin(\alpha) + E_0 \cos(\omega t+\varphi_o)\cos(\alpha) =$$
$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(-\cos(\omega t+\varphi_e) + \cos(\omega t+\varphi_o)\right).$$

Проведя сложение тригонометрических функций в скобках, получим:

$$E'_X = \sqrt{2}E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_e+\varphi_o}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_e-\varphi_o}{2}\right);$$

$$E'_Y = \sqrt{2}E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_e+\varphi_o}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_e-\varphi_o}{2}\right).$$

Введя обозначение $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o$, можем записать:

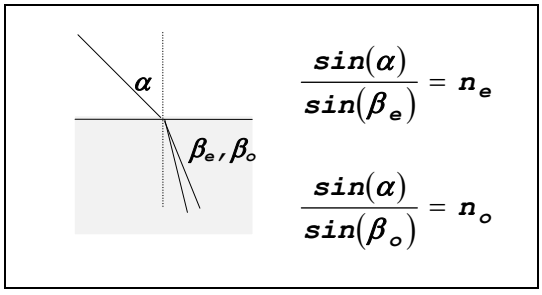
$$\frac{E'^2_X}{2E_0^2 \cos^2(\Delta\varphi/2)} + \frac{E'^2_Y}{2E_0^2 \sin^2(\Delta\varphi/2)} = 1.$$

Мы исключили из уравнений время и получили уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{2}E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d(n_e-n_o)}{2}\right); \qquad b = \sqrt{2}E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d(n_e-n_o)}{2}\right).$$

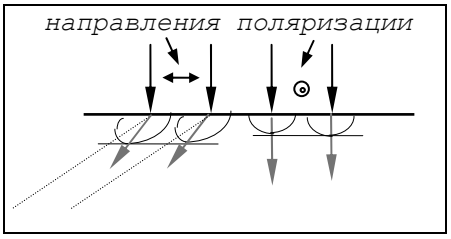
Теперь мы доказали, что при произвольной толщине кристаллической пластинки d линейно поляризованный свет после ее прохождения будет поляризован эллиптически.

11.4. Двойное лучепреломление



Естественно, при наличии двух разных показателях преломления как правило возникает двойное лучепреломление. Рассмотрим сначала простой случай, когда оптическая ось кристалла направлена перпендикулярно плоскости падения луча.

Естественный неполяризованный свет при входе в кристалл разделяется на лучи обыкновенный и необыкновенный. У них разные показатели преломления, поэтому различны и углы преломления. Естественно, преломленные лучи оказываются уже поляризованными: у обыкновенного луча плоскость поляризации совпадает с плоскостью рисунка -направление поляризации перпендикулярно оси кристалла.

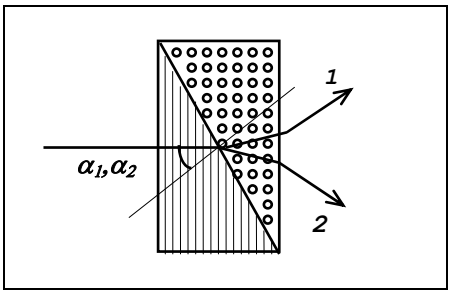


Рассмотрим теперь более сложный случай, когда оптическая ось кристалла направлена под некоторым углом к поверхности. Тогда луч с направлением поляризации, перпендикулярном плоскости чертежа, будет обыкновенным. Сечения его лучевых поверхностей будет окружностями, и он пройдет в кристалл без преломления (на рисунке справа).

Для лучей, показанных слева, сечения лучевых поверхностей будут эллипсами. Направление распространения света будет от центров этих эллипсов к точкам касательной к их огибающей. Таким образом, даже при нормальном падении на поверхность кристалла эти лучи будут преломляться!

11.5. Поляризаторы

У многих кристаллов поглощение света зависит от направления электрического вектора световой волны. К таким кристаллам относится, например, турмалин. В нем обыкновенный луч поглощается намного сильнее необыкновенного. Поэтому после прохождения пластинки турмалина свет оказывается частично поляризованным. Если пластинка достаточно толстая (около ***1 см***), то обыкновенный луч поглощается практически полностью, и проходящий свет оказывается линейно поляризованным.

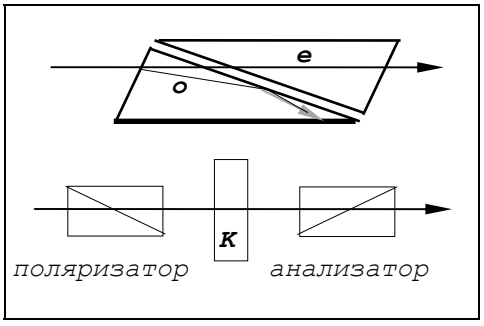


По-своему интересна как поляризатор призма Волластона. Она состоит из двух треугольных призм, изготовленных из одноосных кристаллов, оптические оси которых взаимно перпендикулярны.

В левой половине призмы обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются по одной прямой, хотя и с разными скоростями. Но на границе обыкновенный луч, скажем, луч ***1***, становится необыкновенны. И наоборот - второй луч из необыкновенного превращается в обыкновенным. Поэтому законы преломления для них выглядят по-разному:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta_1)} = \frac{n_e}{n_o}; \qquad \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta_2)} = \frac{n_o}{n_e}.$$

В этих выражениях, очевидно, $\alpha_1=\alpha_2$. Выходящие из призмы лучи линейно поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.



Первая поляризационная призма была изобретена шотландским физиком Николем. Такая призма обычно и называется *николем*, как и некоторые другие призмы сходной конструкции.

Изготавливается она из исландского шпата и состоит из двух частей специальной формы. Половинки призмы склеиваются между собой канадским бальзамом.

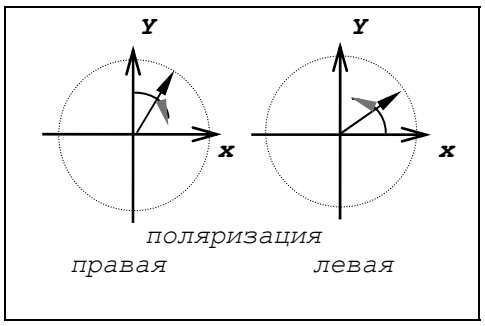
Углы шлифовки боковых граней и угол разрезания кристалла подбираются таким образом, чтобы обыкновенный луч ***o*** испытывал на границе полное отражение. Затем от поглощается на зачерненной боковой рани, а из николя выходит линейно поляризованный луч.

На рисунке также показаны обычно используемые условные обозначения поляризатора и анализатора. Между ними помещен исследуемый кристалл ***K***.

Лекция 14

11.6. Анализ поляризованного света

При анализ вида поляризации светового луча могут возникнуть определенные трудности. Скажем, у нас имеется луч света неполяризованного. Поставив на его пути николь (анализатор) и поворачивая его, мы не обнаружим изменения интенсивности. Но тот же эффект будет и в том случае, если свет будет поляризован по кругу!



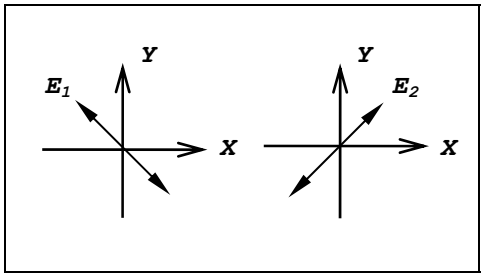
Чтобы различить два таких луча следует использовать пластину в $\lambda/4$ - после прохождения такой пластины в случае круговой поляризации свет станет поляризованным линейно. Теперь, поворачивая анализатор, мы сможем при некотором его положении достичь нулевой интенсивности света.

Рассмотрим эту задачу несколько более детально. При круговой поляризации вращение вектора электрического поля может происходить по часовой стрелке, или против нее (правая и левая круговая поляризация). Запишем соответствующие аналитические выражения:

$$\vec{E}_{П} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t+\pi/2) \\ E_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_{Л} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t-\pi/2) \\ E_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Поставим на пути луча света пластинку в $\lambda/4$. Предположим, что наша пластинка имеет меньшую на $\lambda/4$ оптическую длину для обыкновенного луча (x-составляющая). Предположим также, что выписанные выражения описывают колебания непосредственно перед пластинкой в $\lambda/4$.

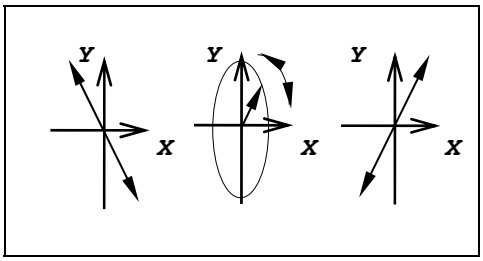
Введем обозначения для волновых чисел обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле - k_o и k_e. Согласно первому предположению $k_o d - k_e d = -\pi/2$. Как видно из выражения $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)$, если после пластинки фаза колебаний необыкновенного луча изменится на $-\varphi$, то обыкновенного - на $-\varphi+\pi/2$. Мы всегда можем положить $\varphi=0$ (или $\varphi=2k\pi$). Поэтому выписанные выражения изменятся следующим образом:



$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t+\pi) \\ E_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix};$$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t) \\ E_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix} -$$

такие колебания будут происходить в некоторой точке за кристаллической пластинкой. В обоих случаях циркулярно поляризованный свет превращается в линейно поляризованный. Но в первом случае плоскость поляризации пересекает плоскость XOY по второму и четвертому квадрантам, во втором - по первому и третьему квадрантам.



А теперь рассмотрим, как действует пластинка в $\lambda/4$ на эллиптически поляризованный свет.

Поворачивая анализатор, можно определить направления максимума и минимума электромагнитных колебаний. Проделав мысленно такие манипуляции, совместим направление, например, оси OY с большой осью эллипса. Тогда аналитическая запись колебаний вектора $\vec{E}$ будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} E_x \cos(\omega t \pm \pi/2) \\ E_y \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

От круговых колебаний эту запись отличает лишь неравенство E_x и E_y. Поэтому после прохождение пластинки в $\lambda/4$ такой свет станет линейно поляризованным. В отличии от случая круговой поляризации направление колебаний $\vec{E}$ не будет составлять угла в 45^0 с осями, а то, по каким квадрантам пройдет направление колебаний, зависит от того, право- или лево-поляризованным является эллиптически поляризованный свет.

11.7. Естественное вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества, например, раствор сахара обладают способностью поворачивать плоскость поляризации линейно поляризованного света. Объяснение этого явления достаточно просто.

Причиной вращения (поворота) плоскости поляризации является то, что лево- и право-поляризованный по кругу свет распространяется в таких веществах с различной скоростью, а луч линейно поляризованного света можно представить как сумму двух лучей, поляризованных по кругу в разные стороны:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz) \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kz - \pi/2) \end{pmatrix}.$$

В веществе, которое обладает способностью поворачивать плоскость поляризации, скорости распространения циркулярно право- и лево-поляризованного света различны. Поэтому,

$$\begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_1 z) \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_1 z + \pi/2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_2 z) \\ \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - k_2 z - \pi/2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \\ E_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_0 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \\ E_0 \sin\left(\frac{k_1 - k_2}{2} z\right) \cos\left(\omega t - \frac{k_1 + k_2}{2} z\right) \end{pmatrix}.$$

Сопоставив эту запись с первоначальной

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_0 \cos(0) \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(0) \cos(\omega t - kz) \end{pmatrix},$$

мы увидим, что плоскость поляризации повернулась на угол

$$\theta = \frac{k_1 - k_2}{2} z .$$

В промышленности эффект вращения плоскости поляризации при прохождении света через раствор сахара практически применяется для измерения концентрации раствора.

11.8. Эффект Зеемана и поляризация

Исходя из понимания, что излучение световой волны происходит в результате колебаний электрического диполя, рассмотрим поведение диполя в магнитном поле.

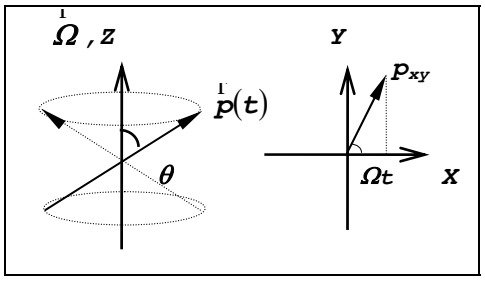
На движущийся со скоростью $\vec{v}$ действует сила Лоренца

$$\vec{F}_B = e\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

В результате, естественно, характер движения электрона в ходе колебаний изменится. Перейдем, однако, во вращающуюся систему координат. В такой системе на тот же электрон будет действовать сила Кориолиса

$$\vec{F}_K = 2m\left[\vec{v}\vec{\Omega}\right],$$

где Ω - скорость вращения системы отсчета.



Зависимость этих сил от скорости $\vec{v}$ с одной стороны, и от поля $\vec{B}$ и от скорости вращения с другой - $\vec{\Omega}$ одинаковы. Это обстоятельство позволяет нам просто решить задачу о колебаниях электрического диполя в магнитном поле: направив скорость вращения системы вдоль магнитного поля и подобрав нужную скорость вра-

щения системы, мы можем добиться компенсации силы Лоренца и силы Кориолиса. В результате во вращающейся системе отсчета колебания будет происходить "обыкновенным" способом, как они происходили бы в отсутствии магнитного поля. Для этого необходимо лишь выполнение условия

$$2m\Omega = eB; \qquad \Omega = \left(e/2m\right)B$$

при подходящем направлении вращения системы.

Высказанные утверждения составляют суть (и доказательство) теоремы Лармора.

Нас, разумеется, будет интересовать излучение в лабораторной, неподвижной системе отсчета. Такое излучение в определенном направлении определяется составляющей вектора дипольного момента, перпендикулярной этому направлению.

Проще всего обстоит дело с z-составляющей амплитуда ее колебаний остается неизменной. Мы можем записать для нее выражение $\vec{e}_z\left|\vec{p}(t)\right| cos(\theta)$. Это некоторый колеблющийся диполь, направленный вдоль оси OZ - его излучение имеет максимум в плоскости XOY.

Запишем теперь выражения для других составляющих:

$$\vec{e}_x\left|\vec{P}(t)\right| sin(\theta)\, cos(\Omega t) \;=\; \vec{e}_x p_S\, cos(\omega t)\, cos(\Omega t)\,;$$

$$\vec{e}_y\left|\vec{P}(t)\right| sin(\theta)\, sin(\Omega t) \;=\; \vec{e}_y p_S\, cos(\omega t)\, sin(\Omega t)\,.$$

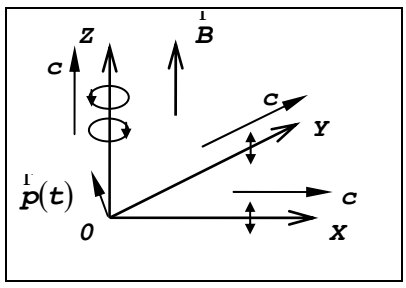
Преобразуем эти выражения:

$$\begin{pmatrix} p_S\, cos(\omega t)\, cos(\Omega t) \\ p_S\, cos(\omega t)\, sin(\Omega t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_S/2\, cos\left((\omega+\Omega)\cdot t\right) \\ p_S/2\, sin\left((\omega+\Omega)\cdot t\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_S/2\, cos\left((\omega-\Omega)\cdot t\right) \\ -\,p_S/2\, sin\left((\omega-\Omega)\cdot t\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_S/2\, cos\left((\omega+\Omega)\cdot t\right) \\ p_S/2\, cos\left((\omega+\Omega)\cdot t - \pi/2\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_S/2\, cos\left((\omega-\Omega)\cdot t\right) \\ p_S/2\, cos\left((\omega-\Omega)\cdot t + \pi/2\right) \end{pmatrix}.$$

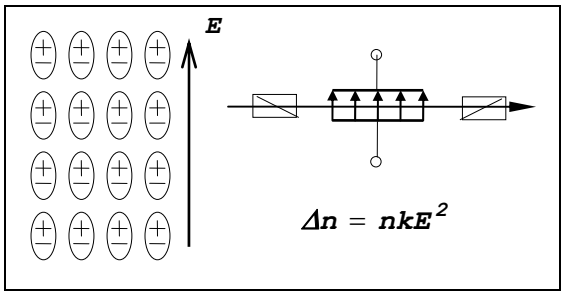
Итак, мы убедились, что в направлении оси OZ, в направлении магнитного поля диполь излучает две волны. Они различаются частотами ($\omega_+ = \omega+\Omega;\quad \omega_- = \omega-\Omega;\quad \Omega = \left(e/2m\right)B$) и поляризованы по кругу в противоположных направлениях.



Вообще говоря, для анализа эффекта Зеемана необходим квантовый подход. Позднее мы еще вернемся к этому вопросу, а пока лишь отметим, что классическая физика объясняет только так называемый *простой* эффект Зеемана. На основе эффекта Зеемана ниже будет проанализирован эффект магнитного вращения плоскости поляризации света.

11.9. Искусственное двойное лучепреломление

Сколько-нибудь детально строением кристаллов мы заниматься не будем (или - не можем). Причины возникновения анизотропии, которая является причиной двойного лучепреломления, для нас останутся загадкой. Поэтому для нас особенно ценно обсуждение искусственного двойного лучепреломления, когда причины анизатропии совершенно прозрачны.



Может, не самым простым, но имеющим большую практическую ценность, является создание анизотропии с помощью электрического поля. если молекулы вещества полярны, их расположение под действием поля становится в определенной степени упорядоченным. Неполярные молекулы под действием поля поляризуются. Направление поляризации и становится осью, определяющей анизотропию скорости распространения света.

Соответствующее устройство называется ячейкой Керра. Рабочим веществом обычно является жидкость. В нее погружаются параллельные металлические пластины, образующие плоский конденсатор, поле которого и осуществляет поляризацию вещества. Разность показателей обыкновенного и необыкновенного лучей $\Delta n = n_o - n_e$ оказывается пропорциональной показателю преломления вещества n и квадрату электрического поля E^2 - эффект является квадратичным. В выражении $\Delta n = nkE^2$ коэффициент пропорциональности k называется постоянной Керра.

Поместив ячейку Керра между скрещенными поляризаторами и подавая на нее импульсное напряжение. можно осуществлять управление проходящим через систему светом. Время переключения света может быть чрезвычайно малым - порядка 10^{-12} *с*.

Другой способ искусственного создания анизотропии - деформация, видимо, не требует особых пояснений. При сжатии или растяжении изотропного материала в направлении деформации создается оптическая ось и проявляется явление двойного лучепреломления.

Кстати, пластинку в $\lambda/4$, например, можно изготовить из обыкновенного целлофана, в котором после его изготовления остаются остаточные напряжения. Сам по себе этот материал вполне изотропный.

11.10. Магнитное вращение плоскости поляризации

Как мы уже знаем, луч линейно поляризованного света может быть представлен как сумма (суперпозиция) двух циклически поляризованных лучей:

$$\vec{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_0/2\cos(\omega t - kz) \\ E_0/2\cos(\omega t - kz - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0/2\cos(\omega t - kz) \\ E_0/2\cos(\omega t - kz + \pi/2) \end{pmatrix}.$$

Для вакуума это лишь тождественное преобразование выражения, но в магнитном поле благодаря эффекту Зеемана у циклически право- и ле-

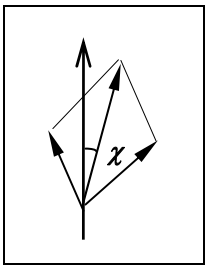
во-поляризованных будут разные собственные частоты $\omega_0+\Omega$ и $\omega_0-\Omega$. Следовательно, у этих лучей будут разными и показатели преломления:

$$n_+ = \sqrt{1 + \frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{(\omega_0+\Omega)^2 - \omega^2}}; \qquad n_- = \sqrt{1 + \frac{Ne^2/m\varepsilon_0}{(\omega_0-\Omega)^2 - \omega^2}}.$$

Введя обозначение $\xi = \omega_0^2 - \omega^2$, запишем выражение для производной показателя преломления:

$$\frac{dn}{d\xi} = \frac{dn}{d\omega}\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{dn}{d\omega}\left(\frac{d\xi}{d\omega}\right)^{-1} = -\frac{dn}{d\omega}\frac{1}{2\omega}.$$

В нашем случае при подсчете $\Delta n = (dn/d\xi)\Delta\xi$ следует взять $\Delta\xi = (\omega_0+\Omega)^2 - (\omega_0-\Omega)^2 = 4\omega_0\Omega$. Поэтому, считая $\omega \approx \omega_0$, получим:



$$\Delta n = -\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega_0}{\omega}2\Omega \approx -\frac{dn}{d\omega}2\Omega.$$

Далее можно провести такие рассуждения. Некоторое расстояние l волны пройдут за времена $t_+ = l\cdot n_+/c$ и $t_- = l\cdot n_-/c$. При этом вектор электрического поля каждой волны вращается (в разные стороны) с угловой скоростью ω. Один из векторов повернется на угол $\varphi_+ = \omega\cdot l\cdot n_+/c$, другой (в противоположную сторону) на $\varphi_- = \omega\cdot l\cdot n_-/c$. Поэтому угол поворота плоскости поляризации на длине l

$$\chi = \left|(\varphi_+ - \varphi_-)/2\right| = \left|\frac{\omega\cdot l}{2c}\Delta n\right| = \left|\frac{\omega\cdot l}{2c}\frac{dn}{d\omega}2\Omega\right| = \left|\frac{\lambda\cdot l}{c}\frac{dn}{d\lambda}\Omega\right| = \left|\frac{dn}{d\lambda}\frac{\lambda l}{c}\frac{e}{2m}B\right|;$$

$$\chi = R\cdot l\cdot B; \qquad R = \left|\frac{e}{2mc}\lambda\frac{dn}{d\lambda}\right|.$$

В выписанных выражениях R - постоянная вращения (постоянная Верде).

Лекция 15

12. Тепловое излучение

12.1. Основные понятия. Закон Кирхгофа

До сих пор мы в основном занимались волнами как таковыми, необязательно конкретизируя природу волны. Соответственно, в определенном смысле, в разговорах часто присутствовало больше геометрии, чем физики. Хотя, конечно, физика без геометрии - это не физика.

Но вот теперь на первый план выходят очень непростые существенно физические проблемы и закономерности. И, в частности, разговор о тепловом излучении требует введения некоторых специальных понятий.

Говоря о тепловом излучении, мы будем говорить о равновесном состоянии, о равновесии между нагретыми телами - эти тела излучают тепловую энергию и поглощают ее. Иначе говоря, имеет место равновесие между телами и электромагнитным полем, в которые эти тела оказываются "погруженными".

Для описания этих процессов нам понадобятся некоторые новые понятия. Прежде всего это энергетическая светимость R. В соответствии с определением, с элементарной поверхности Δs за время Δt излучается энергия $\Delta W = R \cdot \Delta s \cdot \Delta t$. Эта энергия относится ко всему частотному диапазону и излучается в пределах телесного угла 2π.

Следующее понятие - испускательная способность r_ω. Она входит в выражение $dR_\omega = r_\omega d\omega$ и определяет энергетическую светимость в диапазоне $d\omega$. Однако, испускательная способность зависит также и от температуры. Поэтому обычно пишут $dR_{\omega T} = r_{\omega T} d\omega$. Тогда энергетическая светимость при некоторой температуре

$$R_T = \int dR_{\omega T} = \int_0^\infty r_{\omega T} d\omega .$$

Испускательную способность иногда удобно относить не к некоторому значению частоты, а к значению длины волны λ. Тогда пишут $dR_\lambda = r_\lambda d\lambda$. Поскольку

$$d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$$

и по смыслу $dR_\omega = dR_\lambda$, мы имеем:

$$r_\omega d\omega = r_\lambda d\lambda ;$$

$$r_\omega d\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega ;$$

$$r_\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} .$$

Последнее выражение связывает величины r_ω и r_λ, и мы при необходимости можем переходить от одной к другой.

При падении лучистой энергии на поверхность часть ее, вообще говоря, поглощается. Поглощательная способность зависит от частоты и от температуры. Поэтому выражение для нее записывается в виде:

$$a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_{\omega T}}{d\Phi_{\omega T}} .$$

В знаменателе стоит поток падающей лучистой (электромагнитной) энергии, относящейся к интервалу $d\omega$, в числителе - поглощенная часть потока. Если при любых частотах $a_{\omega T} \equiv 1$, тело называется абсолютно черным. При частичном поглощении падающего потока энергии говорят о сером теле. При этом подразумевается, что поглощательная способность не зависит от частоты: $a_{\omega T} \equiv a_T < 1$. Естественно, поглощательная способность не может быть больше единицы.

Таковы основные понятия, необходимые нам для разговора о тепловом излучении.

Мы уже говорили, что речь идет о тепловом равновесии между телом (его излучением) и окружающем его пространстве, заполненном лучистой энергии. Что будет, если имеется несколько тел с разными свойствами поверхностей? Оказывается, что отношение испускательных и поглощательных способностей обязаны быть равны:

$$\left.\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right|_1 = \left.\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}}\right|_2 .$$

Действительно, в противном случае у них были бы различные температуры и мы с легкостью получили бы вечный двигатель.

Это отношение представляет собой некоторую функцию частоты и температуры (или же длины волны и температуры):

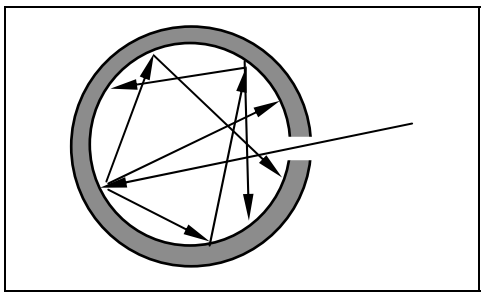
$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T) = \frac{2\pi c}{\omega^2}\varphi(\lambda, T) = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\varphi(\lambda, T) .$$

Это соотношение между функциями $f(\omega, T)$ *и* $\varphi(\lambda, T)$ следует из таких соображений. Для абсолютно черного тела $a_{\omega T} \equiv 1$ и, стало быть,

$$f(\omega, T)d\omega = \varphi(\lambda, T)d\lambda .$$

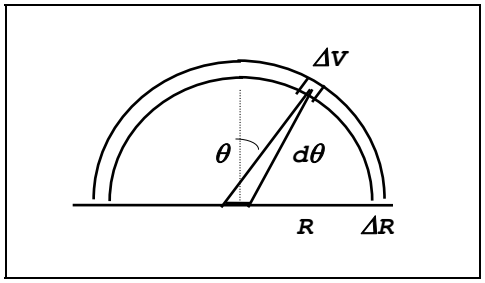
Абсолютно черное тело является некоторой идеализацией - таких тел в природе просто не существует. Но к свойствам абсолютно черного тела могут быть сколь угодно близки свойства некоторого специального устройства. Оно представляет собой некую полость с, вообще говоря, зачерненной шероховатой внутренней поверхностью и небольшим отверстием. Проникшая через отверстие, электромагнитная волна любой частоты будет рассеиваться на внутренней поверхности полости, частично поглощаться и может выйти из нее только после многочисленных отражений. Доля вышедшей после многочисленных частичных поглощений при "соприкосновении" с внутренней поверхностью полости явно весьма незначительна.

Хотя поглощательная способность внутренней поверхности полости и не равна единице, при каждом отражении происходит поглощение части энергии, при многочисленных отражениях будет поглощена практически вся энергия.



Таким образом, входное отверстие такой полости, даже не являясь поверхностью какого-нибудь тела, обладает свойствами поверхности абсолютно черного тела. И для нас, конечно, важно не столько то, что (почти) вся падающая на эту "поверхность" энергия будет поглощена, сколько то, что ее излучение будет практически совпадать с излучением абсолютно черного тела. В соответствии с законом Кирхгофа.

12.2. Плотность лучистой энергии

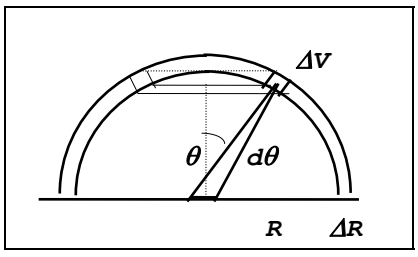


Рассмотрим детальнее равновесие элемента поверхности абсолютно черного тела и лучистой энергии, в которую оно "погружено". Выделим элемент поверхности Δs и некоторый элементарный объем ΔV в окружающем его пространстве.

Введя плотность энергии $u(\omega, T)$, мы можем записать выражение для части заключенной в выделенном объеме энергии, которая протечет через выделенную площадку:

$$\Delta W = \frac{\Delta s \cos(\theta)/R^2}{4\pi} u(\omega, T)\Delta V .$$

Это выражение написано из таких соображений. Запасенная в выделенном объеме энергия будет распространяться в пределах телесного угла 4π. Значит, через выделенную площадку пройдет часть этой энергии, равная отношению телесного угла $\Delta\Omega = \Delta s \cos(\theta)/R^2$, под которым из выделенного объема видна площадка, к полному телесному углу.



Далее, в силу симметрии, элементарный объем можно выбрать в виде "бублика", объем которого

$$\Delta V = 2\pi R \sin(\theta)\cdot R d\theta \cdot \Delta R .$$

Таким образом, чтобы подсчитать энергию, которая пройдет через выделенную площадку за время $\Delta t = \Delta R/c$, нам надо взять интеграл по $d\theta$:

$$\Delta W = \int_0^{\pi/2} u(\omega, T)\frac{\Delta s \cos(\theta) 2\pi R^2 \sin(\theta)\Delta R}{4\pi R^2} d\theta =$$

$$= \frac{u(\omega, T)}{4} \Delta s \Delta t c .$$

В условиях равновесия за то же время площадкой Δs будет испущена такая же по величине энергия. Поэтому,

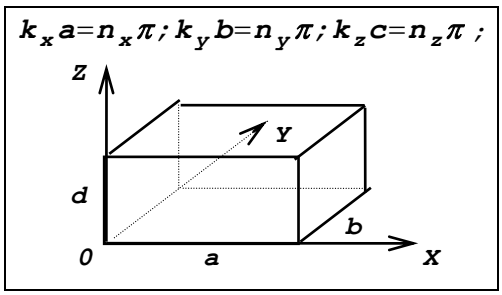
$$f(\omega, T)\Delta s\Delta t = \frac{c}{4} u(\omega, T)\Delta s\Delta t;$$

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T).$$

Мы нашли связь между испускательной способностью абсолютно черного тела и плотностью электромагнитной энергии в условиях равновесия.

12.3. Лучистая энергия

Мы нашли связь между функциями испускательной способности и плотности электромагнитной энергии. Но представляется совершенно неясным, каким способом можно было бы найти вид этих функций. Здесь нужны какие-то дополнительные гипотезы о способе существования, что ли, лучистой, волновой энергии. Ясно, что такое описание распределения энергии по частотам (это функции частоты!) при определенной температуре должно быть вероятностным, но в основе должно предположить существование какой-то функции распределения, подобно тому, как мы в свое время нашли вид функции распределения Максвелла для молекул (атомов).



Такой гипотезой явилось предположение, что лучистая энергия могла бы существовать в виде стоячих волн. Стоячими волнами мы ранее немного занимались, но теперь нам надо исследовать этот вопрос детальнее.

Пусть у нас имеется полость в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами a,b,c. Условием существования стоячей волны вида

$$\xi = \xi_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = \xi_0 \cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right)$$

является выполнение условий

$$k_x a = n_x \pi; \qquad k_y b = n_y \pi; \qquad k_z d = n_z \pi.$$

Речь, разумеется, идет о плоской волне, и только при выполнении этих условий любой луч волны окажется замкнутым. Причем в любую "стартовую" точку волна будет возвращаться с неизменной фазой.

Теперь можно говорить о некотором распределении стоячих волн по оси частот - они могут принимать лишь некоторые дискретные значения.

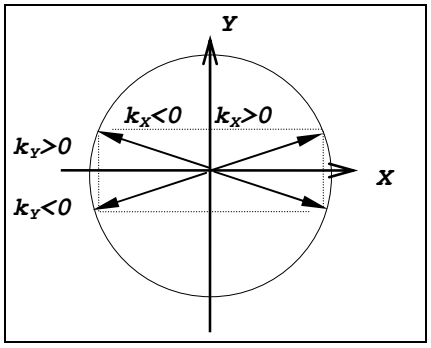
Перейдем в декартово пространство, в котором по осям отложены значения составляющих векторов $\vec{k} = \vec{e}_x k_x + \vec{e}_y k_y + \vec{e}_z k_z$. Концы векторов, удовлетворяющих условию стоячей волны, будут иметь координаты $\left(n_x\pi/a, n_y\pi/b, n_z\pi/d\right)$. Это позволяет нам говорить о плотности таких точек в k - пространстве: поскольку $\Delta n_x = \Delta n_y = \Delta n_z = 1$, элементарный объем на одну точку (конец вектора $\vec{k}$) $\Delta V_k = \pi^3/(abd)$. Равная обратной величине элементарного объема, плотность точек N_k в k - пространстве оказывается величиной постоянной: abd/π^3.

Собственно, нас интересуют количества векторов в модулем от k до $k+\Delta k$. Чтобы подсчитать это количество, выберем элементарный объем в k - пространстве в виде тонкого шарового слоя радиуса k и толщиной Δk и умножим его на плотность точек:

$$\Delta N_k = 4\pi k^2 \Delta k \frac{abd}{\pi^3}.$$

Теперь нам надо проделать еще такие операции. Во-первых, перейдем от волновых векторов k к частотам ω: $k = \omega/c$; $\Delta k = \Delta\omega/c$. Затем нам надо умножить полученное число на 2, поскольку имеется два взаимно перпендикулярных направления колебаний - это будут разные стоячие волны. Тогда на единицу объема мы получаем такое количество волн с частотой ω:

$$\Delta n'_\omega = 8 \frac{\omega^2 \Delta\omega}{\pi^2 c^3}.$$



Теперь попробуем понять, что мы, собственно, получили. Это выражение дает нам число волн с частотой ω в единице объема. Но это еще не количество стоячих волн. При каждом отражении волна изменяет направление распространения, но это остается та же волна с частотой ω. При нашем же подсчете они считались различными волнами - с определенным модулем волнового числа k и независимо от направления вектора $\vec{k}$. Поэтому полученное количество волн нам надо разделить на 8 и вот почему.

При каждом отражении изменяется знак одной из проекций вектора $\vec{k}$. Как видно из рисунка, изменение знаков проекций k_x и k_y дает четыре возможные направления вектора $\vec{k}$. Но остается еще возможность изменения знака k_z - итого получается 8 возможных направлений распространения (одной и той же) волны с частотой ω. Таким образом, переходя к дифференциалам, мы получаем нужное выражение:

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}.$$

Эти стоячие волны заманчиво трактовать как колебательные степени свободы для лучистой энергии. Тогда на каждую стоячую волну пришлась бы порция энергии kT. Но здесь нас ждет большая неприятность: количество стоячих волн (вплоть до $\omega=\infty$) неограничено, плотность энергии оказывается бесконечной, что, конечно, никак не может отвечать реальности.

Тем не менее не стоит приходить в отчаяние. Нам еще придется сделать некоторые уточнения, связанные с более глубоким пониманием физики. Тогда мы и получим разумный результат.

12.4. Формула Планка

Изучение теплового равновесного излучения как и других явлений привело физиков к идее квантования. Каждой колебательной степе-

ни свободы пришлось приписать энергию в несколько энергетических квантов - порций энергии величиной $\hbar\omega$.

Количество стоячих волн с энергией $\varepsilon_n = n\hbar\omega$ определяется распределением Больцмана:

$$N_n = N_0 \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right).$$

С увеличением частоты количество волн с большой энергией уменьшается и тем самым снимается проблема бесконечной плотности энергии.

Подсчитаем среднюю энергию стоячей волны с частотой ω:

$$\langle\varepsilon_\omega\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} N_n\varepsilon_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n} = \hbar\omega \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\exp\left(-n\hbar\omega/kT\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-n\hbar\omega\right)} =$$

$$= \hbar\omega \cdot \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\exp\left(-n\xi\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-n\xi\right)} = -\hbar\omega \cdot \frac{d}{d\xi} ln\left(\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-n\xi\right)\right).$$

Мы ввели обозначение $\xi = \hbar\omega/kT$.

Выражение под знаком логарифма представляет собой сумму членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $\exp(-\xi)$. Поэтому средняя энергия стоячей волны

$$\underline{\langle\varepsilon_\omega\rangle} = -\hbar\omega \cdot \frac{d}{d\xi} ln\left(\frac{1}{1-\exp(-\xi)}\right) = \hbar\omega \cdot \frac{d}{d\xi} ln\left(1-\exp(-\xi)\right) =$$

$$= \hbar\omega \cdot \frac{\exp(-\xi)}{1-\exp(-\xi)} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\xi)-1} = \underline{\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\hbar\omega/kT\right)-1}}.$$

Умножив это значение на количество волн в интервале $d\omega$, получим энергию в этом интервале:

$$u(\omega, T)d\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\hbar\omega/kT\right)-1} \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3},$$

мы получим для плотности лучистой энергии выражение

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\hbar\omega/kT\right)-1},$$

которое носит название формулы Планка.

Лекция 16

12.5. Закон Стефана-Больцмана и закон смещения Вина

Мы с Вами получили связь между плотностью лучистой энергии и испускательной способностью абсолютно черного тела

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$$

и формулу Планка для плотности энергии

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Это позволяет нам записать выражение для испускательной способности абсолютно черного тела:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Это выражение также называют формулой Планка. С ее помощью можно получить закон Стефана-Больцмана - связь энергетической светимости абсолютно черного тела с температурой:

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T)d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Произведем замену переменной: введем $\xi = \hbar\omega/kT$. Тогда выражение для энергетической светимости примет вид:

$$R^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{\exp(\xi) - 1}.$$

Интеграл в правой части выражения равен $\pi^4/15$. Таким образом,

$$R^* = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4; \qquad \sigma = 5{,}6696 \cdot 10^{-8}\ Вт/(м^2 \cdot К^4).$$

Величина σ называется постоянной Стефана-Больцмана и ее значение, подсчитанное с помощью формулы Планка, весьма точно совпадает с определенным экспериментально.

Закон смещения Вина связывает температуру и длину волны, на которую приходится максимум излучения абсолютно черного тела:

$$T\lambda_m = b; \qquad b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К.$$

Чтобы получить выражение для b, нужно исследовать функцию

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right)$$

на экстремум. Принципиальных проблем в этой связи не возникает, но вычисления оказываются достаточно громоздкими. И тем не менее, учитывая огромную важность формулы Планка, нам следует заняться этими вычислениями.

Прежде всего перейдем в функции $f(\omega, T)$ от переменной $\omega = 2\pi c/\lambda$ к переменной λ. Проследите внимательно за выкладками:

$$f(\omega, T) = \frac{\mathrm{h}^3\omega^3}{\mathrm{h}^2 4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp(\mathrm{h}\omega/kT) - 1} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\mathrm{h}2\pi c}{\lambda kT}\right)^3 (kT)^3}{\mathrm{h}^2 4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\mathrm{h}2\pi c}{\lambda kT}\right) - 1} =$$

$$= \frac{(kT)^3}{\mathrm{h}^2 4\pi^2 c^2} \cdot \frac{(1/\lambda')^3}{\exp(1/\lambda') - 1}.$$

Мы ввели обозначение $1/\lambda' = \mathrm{h}2\pi c/\lambda kT$. Поскольку

$$\frac{2\pi c}{\lambda^2} = \left(\frac{\mathrm{h}2\pi c}{\lambda kT}\right)^2 \cdot \frac{(kT)^2}{\mathrm{h}^2 2\pi c} = \frac{(kT)^2}{\mathrm{h}^2 2\pi c} \cdot \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^2,$$

мы получаем не такое уж сложное выражение:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right) = \frac{(kT)^2}{\mathrm{h}^2 2\pi c} \cdot \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^2 \cdot \frac{(kT)^3}{\mathrm{h}^2 4\pi^2 c^2} \cdot \frac{(1/\lambda')^3}{\exp(1/\lambda') - 1} =$$

$$= \mathrm{const} \cdot \frac{(1/\lambda')^5}{\exp(1/\lambda') - 1}.$$

Теперь займемся дифференцированием. Нам необходимо решить уравнение

$$\frac{d}{d\lambda'} \frac{(1/\lambda')^5}{\exp(1/\lambda') - 1} = -5 \frac{(1/\lambda')^6}{\exp(1/\lambda') - 1} + \frac{(1/\lambda')^5 \exp(1/\lambda')(1/\lambda')^2}{\left(\exp(1/\lambda') - 1\right)^2} = 0;$$

$$-5\exp(1/\lambda') - 5 + (1/\lambda')\exp(1/\lambda') = 0.$$

Решить это уравнение “напрямую” нам не удастся. Поэтому перепишем его в виде

$$\frac{1}{\lambda'} = 5\left(1 + \exp\left(-1/\lambda'\right)\right)$$

и решим методом последовательных приближений, в данном случае весьма эффективным.

В качестве нулевого приближения напрашивается значение $1/\lambda' = 5$. Тогда

$$\left.\frac{1}{\lambda'}\right|_1 = 5\left(1 - \exp(-5)\right) = 4{,}966310;$$

$$\left.\frac{1}{\lambda'}\right|_2 = 5\left(1 - \exp(-4{,}966310)\right) = 4{,}965156;$$

$$\left.\frac{1}{\lambda'}\right|_3 = 5\left(1 - \exp(-4{,}965156)\right) = 4{,}965117.$$

Ограничившись четырьмя знаками после запятой, получаем:

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{h2\pi c}{\lambda_m kT} = 4{,}9651;$$

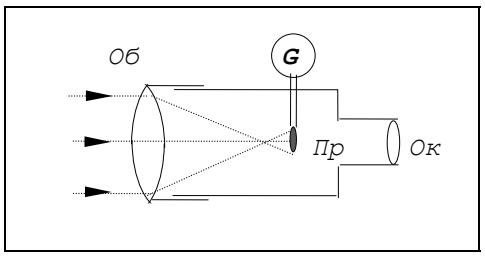
$$T\lambda_m = b; \qquad b = \frac{h2\pi c}{4{,}9651 \cdot k} = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К.$$

Полученное нами значение b очень хорошо совпадает с экспериментальным значением.

Сами законы Стефана-Больцмана и закон смещения Вина были установлены раньше, чем была получена формула Планка. То, что из нее были затем получены верные значения констант σ и b, явилось блестящим подтверждением верности тех представлений, которые были заложены при ее получении. Но смысл этих представлений нам еще нужно осознать.

12.7. Оптическая пирометрия

Установление законов Стефана-Больцмана и закона смещения Вина позволили создать измерители температуры, работающие без контакта с горячим, лучшее сказать, с раскаленным телом.

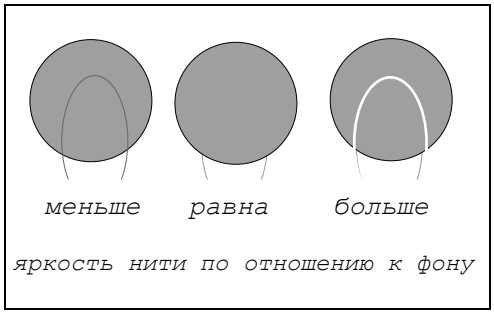


Радиационные пирометры. Такие пирометры основаны на фокусировке излучения раскаленной поверхности на некотором теплоприемнике. Замечательно, что яркость резкого (сфокусированного) изображения не зависит от расстояния до объекта, если это последнее велико по сравнению с фокусным расстоянием объектива. Собственно, приходящую от удаленного объекта волну можно считать плоской, отчего попадающая на теплоприемник энергия слабо зависит от расстояния. Важно только, чтобы создаваемое объективом изображение полностью перекрывало теплоприемник.

Разумеется, предварительно производится градуировка пирометра по абсолютно черному телу. Но поскольку энергетическая светимость реальной раскаленной поверхности при той же температуре меньше светимости абсолютно черного тела (в соответствии с законом Кирхгофа),

измеренная радиационная температура оказывается меньше действительной.

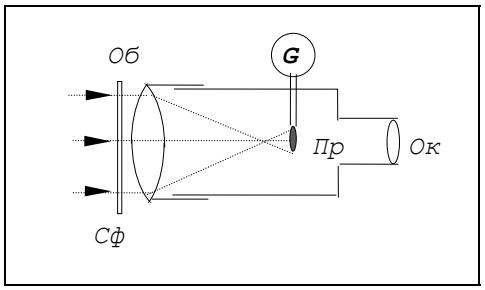
В справочниках имеются соответствующие поправочные коэффициенты, учитывающем отличие светимости поверхностей реальных материалов от светимости абсолютно черного тела. Любопытно, что значения этих коэффициентов в свою очередь зависят от температуры.



Яркостные пирометры. Как следует из названия, действие такого пирометра основано на сравнении яркости свечения тела, температура которого измеряется, и некоторого другого - нити лампы накаливания. Наиболее удобным здесь оказался красный цвет и именно через красный светофильтр производится в этом случае наблюдение (λ=**660 нм**).

Применение пирометров обычно связано с металлургией. Производится наблюдение, например, окошка в стенки доменной или мартеновской печи. На фоне изображения светящегося окошка наблюдается нить лампочки накаливания. Регулируя ток через лампочку, добиваются уравнивания их яркостей в красном цвете. При этом нить лампочки становится невидимой - потому такой пирометр называют пирометром с "исчезающей" нитью.

Пирометр градуируется по абсолютно черному телу - при изменении тока накала по находящейся в поле наблюдения шкале считывается температура черного тела, при котором нить должна "исчезает". Естественно, поскольку светимость реального тела при той же температуре меньше, для достижения равенства яркостей черного и нечерного тел это последнее должно быть нагрето сильнее, яркостная температура оказывается завышенной.



Цветовые пирометры. Серое тело имеет тот же спектральный состав, что и абсолютно черное тело. Поэтому температуру серого тела можно определить в соответствии с законом смещения Вина, определив длину волны λ_m, на которую приходится максимум излучения.

Однако, вместо исследования всего спектра излучения, производится измерения светимостей на двух различных частотах (при двух значениях длин волн) и по их отношению определяется температура тела. Заметим, что для черного тела при любой температуре это отношение известно.

Собственно, такой пирометр отличается от радиационного тем, что наблюдения производятся через сменные светофильтры.

13.1. Теплоемкость кристаллической решетки

Носителями энергии равновесного теплового излучения согласно концепции Планка являются стоячие (электромагнитные) волны. При этом энергия для каждой частоты отмеряется "порциями", квантами $\hbar\omega$, количество которых определяется распределением Больцмана:

$$N_n = N_0 \exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right).$$

И весьма интересно, что в совсем другой задаче, задаче о теплоемкости кристаллической решетки опять-таки "проходит" такой же подход.

Однако, сначала нужно сказать несколько слов об истории вопроса. Содержащий N атомов кристалл имеет $3N$ степеней свободы - столько значений координат необходимо для описания положения атомов. Согласно классическим представлениям на каждую степень свободы должна приходиться энергия kT: по $kT/2$ на кинетическую и на потенциальную энергию. Отсюда следует закон Дюлонга и Пти, согласно которому молярная теплоемкость C_m *всех* кристаллов одинакова:

$$C_m = \frac{d}{dT}\left(3N_A kT\right) = \frac{d}{dT}\left(3RT\right) = 3R\,.$$

Здесь N_A - число Авогадро, R - универсальная газовая постоянная.

И действительно, при достаточно высоких температурах этот закон оказывается справедливым, но он нарушается при низких температурах. И причина в том, что при низких температурах и при достаточно высоких частотах колебаний оказывается $\hbar\omega > kT$, а между тем величина $\hbar\omega$ - минимальная порция энергии на частоте ω. Значит, при низкой температуре невозможна энергия kT на степень свободы.

Поправить дело попытался Эйнштейн. Он ввел квантование для энергий колебаний отдельных атомом кристалла ($3N$ осцилляторов), введя для каждого среднюю энергию $E_n = n\hbar\omega$. При этом распределение осцилляторов по энергиям он считал подчиняющимся распределению Больцмана.

Полученное им выражение качественно верно описывало поведение теплоемкости и вблизи нулевой температуры. Но много более точный результат был получен Дебаем.

Дебай посчитал, что колебания отдельных атомов не являются независимыми - колебания одного атома вынуждают колебания соседних атомов. Иначе говоря, колебания представляют собой стоячие волны. Любопытно, но количество возможных стоячих волн должно совпадать с числом степеней свободы - $3N$.

Собственно, рассуждения Дебая в основном повторяют рассуждения Планка. Выбрав некий объем в виде прямоугольного параллелепипеда $V=abd$, подсчитывается количество возможных стоячих волн. Условия существования стоячей волны остается прежним: произведение составляющей волнового вектора на соответствующий размер тела должен быть равен целому числу π.

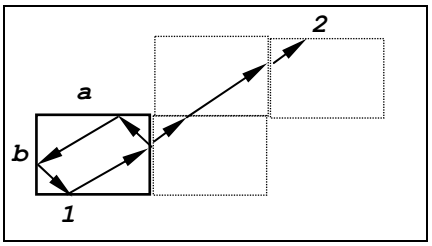
Для струны это сводится к условию кратности ее длины длине полуволны:

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{1}{2}\frac{2\pi}{k}\,; \qquad kL = n\pi\,.$$

Для прямоугольной пластины площадью $S=ab$ необходимое условие будет

$$ak_x = n_x\pi; \qquad bk_y = n_y\pi\,.$$

При таком условии вышедшая из некоторой точки волна после отражений от краев пластины возвращается в то же точку с той же фазой.



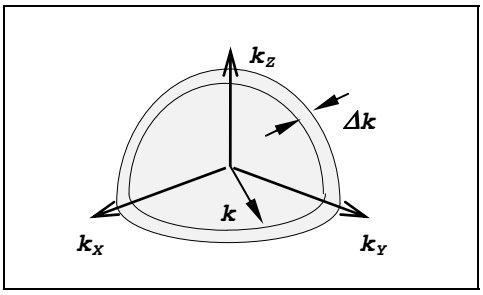
Пояснение этому утверждению дается рисунком. Введем радиус-вектор, соединяющий точки ***1*** и ***2***

$$\vec{r}_{12} = \vec{e}_x 2a + \vec{e}_y 2b .$$

Движение волны вдоль этого радиус-вектора эквивалентно распространении волны в пределах пластины. И поскольку

$$\left(\vec{k}\vec{r}_{12}\right) = 2ak_x + 2bk_y = 2\pi\left(n_x + n_y\right),$$

волна из точки ***1*** в точку ***2*** прийдет с изменение фазы на целое число 2π. Значит, это утверждение справедливо и для распространения волны в пределах пластины из точки ***1*** и, - после отражений, снова в точку ***1***.



Перейдем теперь к трехмерному кристаллу размерами $a \cdot b \cdot d$. При этом добавляется еще условие $dk_z = n_z\pi$.

На рисунке схематически показана ***1/8*** часть сферы радиуса ***k*** в пространстве ***k***-векторов и соответствующая часть сферического слоя толщиной Δk. На один конец ***k***-вектора приходится объем $\Delta V_k = \pi^3/(abd)$. Следовательно, количество ***k*** - векторов с модулем в пределах от ***k*** до $k+\Delta k$ и положительными проекциями на оси будет

$$\Delta N = \frac{1}{8}\frac{4\pi k^2 \Delta k}{\pi^3}(abd) .$$

Мы учитываем только ***k***-векторы с положительными проекциями на оси. Смена знака одной из проекций происходит при отражении волны, но это та же волна, повторно учитывать ее не следует.

Количество таких ***k***-векторов на единицу объема кристалла

$$\Delta n = \frac{k^2 \Delta k}{2\pi^2} .$$

Поскольку $k = \omega/v$, мы можем перейти в этом выражении к частотам. Кроме того, необходимо еще добавить множитель ***3***, поскольку упругие колебания могут происходить в направлении распространения волны и в двух взаимно перпендикулярных поперечных направлениях. Таким образом, переходя к дифференциалам, получаем

$$dn_\omega = \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} .$$

Такова плотность стоячих волн в кристалле. Однако с подсчетом энергии колебаний здесь возникают некоторые особенности, о которых речь пойдет ниже.

Лекция 17

13.2. Теплоемкость кристаллической решетки. Продолжение

Здесь мы проведем некоторые подсчеты, повторяющие проведенные при выводе формулы Планка. Прежде всего запишем выражения для количества стоячих волн с энергией $\varepsilon_n = n\hbar\omega$ и для их энергий:

$$N_n = A\,exp\left(-n\hbar\omega/kT\right); \qquad n\hbar\omega N_n = n\hbar\omega A\,exp\left(-n\hbar\omega/kT\right).$$

Средняя энергия

$$\left\langle \varepsilon_n \right\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega N_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega\, exp\left(-n\hbar\omega/kT\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} exp\left(-n\hbar\omega/kT\right)}.$$

Введя переменную $\xi = \hbar\omega/kT$, перепишем это выражение в виде

$$\left\langle \varepsilon_n \right\rangle = -\hbar\omega \frac{d}{d\xi} ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} exp\left(-n\xi\right)\right) = -\hbar\omega \frac{d}{d\xi} ln\left(\frac{1}{1 - exp\left(-\xi\right)}\right).$$

При преобразованиях мы воспользовались выражением для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Наконец, выполнив дифференцирование, получаем нужное выражение:

$$\left\langle \varepsilon_n \right\rangle = \hbar\omega \frac{d}{d\xi} ln\left(1 - exp\left(-\xi\right)\right) = \hbar\omega \frac{exp\left(-\xi\right)}{1 - exp\left(-\xi\right)} = \frac{\hbar\omega}{exp\left(\hbar\omega/kT\right) - 1}.$$

Подсчитаем теперь тепловую энергию моля кристаллического вещества. При выводе формулы Планка не существует ограничения на максимальную частоту ω. В случае же кристалла не имеет смысла говорить о волне, длина которой меньше расстояния между атомами. А говоря иначе, количество стоячих волн должно равняться числу степеней свободы $3N_A$. Это позволяет определить максимальное значение частоты ($V_{моль}$-объем моля вещества):

$$V_{моль} \int dn_\omega = V_{моль} \int_0^{\omega_m} \frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} = V_{моль} \frac{\omega_m^3}{2\pi^2 v^3} = 3N_A;$$

$$\omega_m = v\sqrt[3]{6\pi^2 N_A / V_{моль}}.$$

Для подсчета тепловой энергии, запасенной молем вещества, нам надо взять интеграл:

$$E_T = V_{моль}\int_0^{\omega_m}\langle\varepsilon_n\rangle\frac{3\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} = V_{моль}\frac{3\hbar}{2\pi^2 v^3}\int_0^{\omega_m}\frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}.$$

При высокой температуре $\hbar\omega/kT < 1$ и экспоненту в знаменателе подынтегрального выражения можно разложить в ряд, ограничившись первым членом разложения: $\exp(\hbar\omega/kT)-1 \approx 1+\hbar\omega/kT-1 = \hbar\omega/kT$. Кроме того, куб скорости в знаменателе можно представить в виде:

$$v^3 = \frac{V_{моль}}{N_A}\frac{\omega_m^3}{2\pi^2}.$$

Тогда для E_T мы получим:

$$E_T = V_{моль}\frac{3\hbar}{2\pi^2}\frac{2\pi^2 N_A}{V_{моль}\omega_m^3}\int_0^{\omega_m}\frac{kT}{\hbar}\omega^2 d\omega = \frac{3\hbar}{2\pi^2}\frac{2\pi^2 N_A}{\omega_m^3}\frac{kT}{\hbar}\frac{\omega_m^3}{3} = 3N_A kT.$$

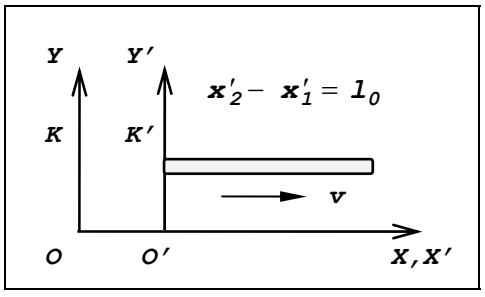
Таким образом, при высокой температуре молярная теплоемкость кристалла

$$C_m = \frac{d}{dT}(3N_A kT) = 3R,$$

и мы получаем закон Дюлонга и Пти. Как должно быть ясно из сказанного, это выражение справедливо лишь при достаточно высокой температуре, когда возможно разложение экспоненты в ряд с ограниченным количеством членов разложения.

Анализировать поведение теплоемкости при низких температурах мы не будем. Отметим только, что в качестве "граничной" температуры вводится так называемая температура Дебая θ, которая определяется условием: $k\theta = \hbar\omega_m$. При температурах $T < \theta$ необходимо учитывать эффекты квантования энергии.

14.1. Преобразования Лоренца



До сих пор у нас не возникало необходимости переходить из одной системы отсчета в другую при больших скоростях относительного движения этих систем. Потому мы пользовались преобразования Галилея, не учитывающими релятивистские эффекты. Но теперь нам понадобятся преобразования Лоренца. При движении со скоростью v некоторой системы K' вдоль оси OX "неподвижной" системы K они имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Мы выписали прямые и обратные преобразования. Отмеченные штрихами величины относятся к движущейся системе отсчета.

Чтобы немного привыкнуть к этим преобразованиям, решим две частные задачи, не имеющие прямого отношения к волнам.

Рассмотрим движение некоторого стержня вдоль оси ***OX***. Свяжем с ним движущуюся систему отсчета ***K′***. Его длина в этой системе отсчета $l_0 = x'_2 - x'_1$. Заметим, что, поскольку стержень в этой системе неподвижен, координаты его концов могут быть определены в произвольные моменты времени - координаты не изменяются во времени. Обратите внимание на это существенное обстоятельство.

Получим теперь выражение для длины стержня в неподвижной системе отсчета. Запишем такое выражение:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Чтобы определить длину движущегося стержня в неподвижной системе отсчета, нам следует определить координаты его концов в один и тот же момент времени, т.е. положить $t_1 = t_2$. При этом условии $x_2 - x_1 = l$ - длина стержня в неподвижной системе отсчета. Таким образом, длина движущегося стержня оказывается меньше его "собственной" длины:

$$l = x_2 - x_1 = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

В таком случае говорят о лоренцовом сокращении длины движущегося стержня.

Предположим теперь, что в неподвижной системе отсчета произошли два события, разделенные промежутком времени $\tau = t_2 - t_1$. Например, это может быть промежуток времени между рождением и распадом некоторой нестабильной частицы. Считая, что частица движется со скоростью v, свяжем с ней систему отсчета. В этой системе промежуток времени между событиями, которые, заметим, в ней произошли в одной и той же точке с координатой x', будет:

$$\tau = \frac{t'_2 + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{t'_1 + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

$$\tau' = \tau\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

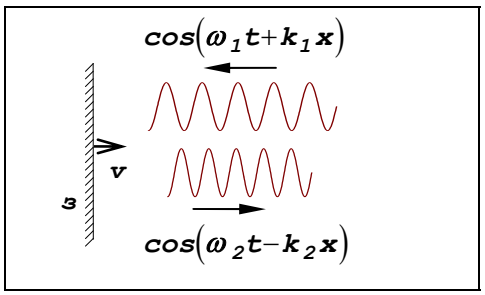
В таком случае говорят о замедлении хода часов в движущейся системе отсчета.

Это замедление хода часов (или хода времени) приводит к любопытному эффекту. Исследуя некоторую нестабильную частицу, мы можем измерить ее "время жизни" τ' которое является характеристикой частицы, а не системы отсчета. Если такая частица после рождения движется со скоростью v, мы можем подумать, что до момента распада она пройдет путь $v\tau'$ - от рождения и до распада *в связанной с частицей* системе отсчета пройдет время τ'. Между тем пройденный за это время путь мы, естественно, измеряем в *неподвижной* системе отсчета. И тогда этот путь окажется намного больше, если скорость частицы близка к скорости света:

$$S = \tau v = \frac{\tau' v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad .$$

Так что, измеряя пройденное от момента рождения частицы до ее распада расстояние, можно непосредственно проверить вывод о замедлении хода времени в движущейся системе отсчета.

14.2. Эффект Допплера



При излучении волны движущимся источником частота излученной волны не совпадает с частотой колебаний источника. Соответственно, воспринимаемая движущимся приемником частота колебаний не совпадает с частотой колебаний, распространяющихся с волной. Связанные с переходом из одной системы в другую изменения частоты и волнового вектора носят название эффекта Допплера.

Рассмотрим процесс отражения электромагнитной волны от движущегося навстречу ей зеркала.

На рисунке представлены электромагнитные волны до и после отражения. Перейдем в систему отсчета, связанной с движущимся зеркалом.

Подставим в выражение для падающей на зеркало волны значения t и x и проведем перегруппировку сомножителей:

$$\cos\left(\omega_1 \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + k_1 \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\omega_1 + vk_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} t' + \frac{k_1 + v\omega_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} x'\right) =$$

$$= \cos\left(\omega' t' + k' x'\right) .$$

В аргументе падающей на зеркало волны в движущейся K' системе

$$\omega' = \frac{\omega_1 + vk_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\omega_1 + (v/c)\omega_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \omega_1 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \; ;$$

$$k' = \frac{k_1 + v\omega_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{k_1 + (v/c)k_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k_1 \sqrt{\frac{1 + x/c}{1 - v/c}} \; .$$

Такой представляется волна наблюдателю, движущемуся вместе с зеркалом.

Проделаем те же операции с аргументом отраженной волны, распространяющейся направо:

$$\cos\left(\omega_2\,\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-k_2\,\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\omega_2-vk_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,t'-\frac{k_2-v\omega_2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,x'\right)=$$

$$=\cos\left(\omega' t'-k' x'\right).$$

Естественно, в этих выражениях ω' и k' одни и те же: в связанной с зеркалом K' системе волна отражается без изменения частоты и волнового числа. Поэтому

$$\omega_1+vk_1=\omega_2-vk_2;\qquad k_1+v\omega_1/c^2=k_2-v\omega_2/c^2.$$

С помощью этих равенств мы можем выразить значения ω_2 и k_2 через частоту и волновое число падающей волны ω_1 и k_1:

$$\omega_1+vk_1=\omega_2-vk_2\quad\Rightarrow\quad\omega_1+\frac{v}{c}\,\omega_1=\omega_2-\frac{v}{c}\,\omega_2\quad\Rightarrow\quad\omega_2=\omega_1\,\frac{1+v/c}{1-v/c};$$

$$k_1+v\omega_1/c^2=k_2-v\omega_2/c^2\quad\Rightarrow\quad k_1+\frac{v}{c}\,k_1=k_2-\frac{v}{c}\,k_2\quad\Rightarrow\quad k_2=k_1\frac{1+v/c}{1-v/c}.$$

При преобразованиях мы воспользовались выражением $c=\omega/k$.

Таким образом, при отражении волны от движущегося навстречу ей зеркала происходит увеличение частоты и, соответственно волнового числа. Если волна имела квант энергии $\hbar\omega_1$, после отражения эта энергия возрастет - за счет работы против сил давления на зеркало в процессе отражения. Это означает, что такой квант энергии обладает импульсом.

Получим выражение для импульса из самых элементарных соображений. Введя среднюю силу взаимодействия кванта F, запишем для изменения импульса выражение:

$$\Delta p=F\Delta t,$$

и, поскольку взаимодействие происходит на скорости света c, изменение энергии

$$\Delta E=F\Delta tc=\Delta pc=\mathrm{h}\Delta\omega.$$

Поэтому

$$\Delta p=\frac{\mathrm{h}\Delta\omega}{c}=\mathrm{h}\Delta k;\qquad p=\mathrm{h}k.$$

Таким вот образом постепенно появляется представление о некоторой частице - фотоне. Ее энергия $E=\mathrm{h}\omega$ и импульс $p=\mathrm{h}k$ связываются с частотой ω и волновым числом k.

14.3. Поперечный эффект Допплера. Аберрация

Преобразования Лоренца мы выписали для случая движения системы отсчета ***K′*** вдоль оси ***OX***. Их надо еще дополнить выражениями для преобразований ***y-*** и ***z-***координат. Они имеют вид

$$y = y'; \qquad z = z' .$$

Вообще говоря, это приводит к выражениям $k_y = k'_y$ и $k_z = k'_z$. Поэтому может создаться впечатление, что при движении электромагнитной волны в перпендикулярном к оси ***OX*** направлении релятивистские эффекты несущественны. Однако это не так.

Предположим, что волна в неподвижной системе отсчета распространяется вдоль оси ***OY*** ($k_x = k_z = 0;\ k_y = k'_y = k$). Перейдем, как мы делали это раньше, в движущуюся систему отсчета:

$$\cos(\omega t + ky) = \cos\left(\omega\,\frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + ky'\right) =$$

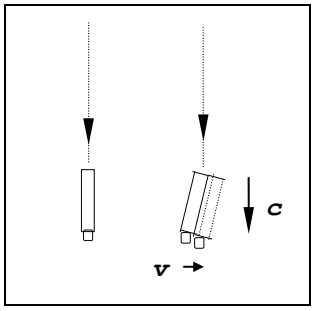
$$= \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,t' + \frac{kv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,x' + ky'\right) =$$

$$= \cos\left(\omega' t' + k'_x x' + k'_y y'\right);$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad k'_x = \frac{k\,v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad k'_y = k .$$

Изменение частоты при поперечном эффекте Допплера связано с замедлением хода времени в движущейся системе отсчета. При этом еще изменяется и направление распространение волны - ее угол с осью ***OY*** определяется выражениями

$$tg(\theta) = \frac{k'_x}{k'_y} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad \sin(\theta) = \frac{v}{c} .$$



Связанное с этим смещение видимого положения звезды на угол θ по отношению к ее истинному положению называют аберрацией. В течение года направление движения Земли при ее обращении вокруг Солнца изменяется, изменяется и положение наблюдаемой звезды на небосводе.

Сама по себе аберрация не является следствием теории относительности. Забыв о последней, мы могли бы провести такие рассуждения.

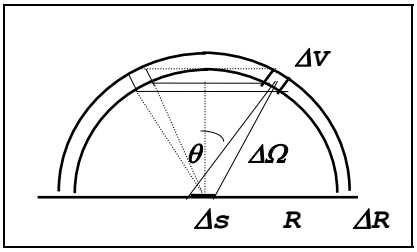
Если телескоп движется перпендикулярно к направлению на звезду, необходимо наклонить его так, чтобы свет распространялся вдоль оси телескопа. Угол наклона при этом должен быть таким, чтобы $tg(\theta') = v/c$. Как видите, результат при этом получается другой. Точное измерение необходимого угла наклона позволяет еще раз проверить справедливость теории относительности.

Лекция 18

15. Фотоны

При подсчете плотности равновесного теплового излучения присвоение каждой степени свободы (стоячей волне) энергии kT приводит к абсурдному результату - бесконечной плотности лучистой энергии. При анализе равновесного теплового излучения потребовался совершенно новый подход - введение квантования энергии в виде "порций" величиной $\hbar\omega$, и количество таких порций определяется распределением Больцмана. Последующие исследования показали, что поглощение или излучение электромагнитной энергии происходит такими же "порциями", квантами.

В конце концов кванты электромагнитной энергии стали восприниматься как особые частицы, фотоны. И для этого были достаточно серьезные основания.



Пусть в некоторой полости находится равновесное тепловое излучение. Подсчитаем давление, которое оно оказывает на *поглощающую* поверхность (отражающую).

В объеме ΔV "запасена" энергия $u\cdot\Delta V$. Из этой энергии на площадку Δs попадет часть, пропорциональная телесному углу $\Delta\Omega = \Delta s\cos(\theta)/R^2$ - под таким углом площадка Δs "видна" из элементарного объема ΔV:

$$\Delta W = u\cdot\Delta V\cdot\frac{\Delta s\cos(\theta)}{4\pi R^2}.$$

С этой энергией, равной mc^2, площадке будет передан импульс $mc=\Delta W/c$ и подействует сила $\Delta F = \Delta W/c\Delta t = \Delta W/\Delta R$. Вклад в давление даст лишь нормальная составляющая этой силы и поэтому выражение для давления будет иметь вид:

$$\Delta p = \frac{\Delta F\cos(\theta)}{\Delta s} = \frac{u\cos^2(\theta)}{4\pi R^2\Delta R}\Delta V.$$

Мы выбрали элементарный объем в виде небольшого кубика. Но под таким же углом площадка Δs видна из любой точки колечка радиуса $r = R\sin(\theta)$, показанного на рисунке. Поэтому в качестве элементарного объема может быть выбрано это колечко, поперечное сечение которого $Rd\theta\cdot\Delta R$:

$$\Delta V' = 2\pi R\sin(\theta)Rd\theta\Delta R;$$

$$dp = \frac{u\cos^2(\theta)}{4\pi R^2\Delta R}\Delta V' = \frac{u\cos^2(\theta)}{4\pi R^2\Delta R}2\pi R^2\sin(\theta)d\theta\Delta R = -\frac{u}{2}\cos^2(\theta)d\cos(\theta).$$

Прежде всего нас будет интересовать давление на зеркальную поверхность, которая вдвое больше выписанной величины. Таким образом, после интегрирования по θ в пределах от нуля до $\pi/2$ мы получаем

$$p = \frac{u}{3}.$$

Но это же выражение мы можем получить и с помощью других рассуждений. Используя понятие фотона, мы скажем, что в объеме ΔV содержится $n_\omega d\omega$ фотонов с частотой в пределах от ω до $\omega+d\omega$ и с импульсом $\hbar k$; $k=\omega/c$. На площадку Δs попадет

$$n_\omega d\omega \frac{\Delta s \cos(\theta)}{4\pi R^2}$$

фотонов и они передадут (зеркальной) поверхности импульс

$$2 n_\omega d\omega \Delta V \frac{\Delta s \cos(\theta)}{4\pi R^2} \hbar k .$$

Время "падения" этих фотонов на площадку будет $\Delta t = \Delta R/c$. Чтобы найти подействовавшую на площадку силу, нам надо разделить на это время переданный импульс. Нормальная к площадке составляющая силы определит давление на площадку:

$$\Delta F_{\omega n} = n_\omega d\omega \frac{\Delta s \cos^2(\theta)}{2\pi R^2 \Delta R} \hbar k c \Delta V ;$$

$$\Delta p_\omega = n_\omega \hbar\omega d\omega \frac{\cos^2(\theta)}{2\pi R^2 \Delta R} \Delta V = u_\omega d\omega \frac{\cos^2(\theta)}{2\pi R^2 \Delta R} \Delta V .$$

Нам осталось, как мы это делали раньше, вместо кубика выбрать элементарный объем в виде колечка, и мы получим:

$$dp_\omega = u_\omega d\omega \frac{\cos^2(\theta)}{2\pi R^2 \Delta R} 2\pi R \sin(\theta) R d\theta \Delta R = u_\omega d\omega \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta .$$

После интегрирования по θ и ω мы получаем то же самое выражение для давления:

$$dp_\omega = \frac{u_\omega d\omega}{3} ; \qquad p = \frac{u}{3} .$$

Таким образом, и волновое рассмотрение равновесного теплового излучения и рассмотрение его как фотонного газа дает один и тот же результат.

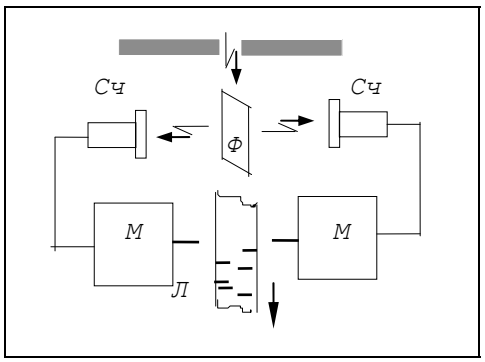
Мы рассмотрели в качестве примера задачу о давлении равновесного теплового излучения на поверхность с *двух разных позиций* вот для чего. Сейчас, когда мы еще не слишком далеко зашли в анализе проблемы квантования, полезно вспомнить, что для определения "концентрации фотонов" мы воспользовались выражением для u_ω: $n_\omega = u_\omega/\hbar\omega$. Иначе говоря, мы произвели некоторую формальную замену переменных - объемную плотность стоячих волн мы заменили на концентрацию фотонов.

Но это не такая "безобидная" замена, как может показаться. Чтобы атом поглотил энергию $\hbar\omega$, он должен какое-то время находиться в переменном электромагнитном поле соответствующей частоты. То же самое можно сказать и об излучении - оно должно "занять" некото-

рое время. А говоря об излучении или поглощении фотона, мы теряем ощущение временной протяженности актов поглощения и излучения. Получается так, будто поглощение или излучение фотона происходит “мгновенно”, поскольку из рассмотрения исключается *процесс* излучения или поглощения. Между тем время излучения или поглощения иногда бывает очень существенно, как мы увидим в дальнейшем.

16. Примеры использования понятия фотона

16.1. Опыт Боте



В этом опыте тонкая фольга облучалась слабым рентгеновским излучением, в результате чего она сама становилась излучателем рентгеновских лучей (наблюдалась рентгеновская флюоресценция). Два независимых счетчика фиксировали фотоны, в момент поглощения фотона на движущейся ленте ставилась метка. Эти метки, фиксирующие поглощения фотонов (квантов рентгеновского излучения) двумя счетчиками, не совпадали во времени. Отсюда и делался вывод о том, что (вторичное) излучение происходило не равномерно в разные стороны, а в определенном направления - к тому или иному счетчику.

Безусловно, это очень удобный способ объяснения работы механизма: фольгой поглощается квант энергии, фотон, возбуждается какой-то атом и этот атом испускает фотон в сторону одного из счетчиков (конечно, фотон может и миновать оба счетчика, остаться незафиксированным). Но такое рассуждение не может считаться доказательством того, что электромагнитная энергия “на самом деле” распространяется в виде направленного движения квантов энергии, фотонов.

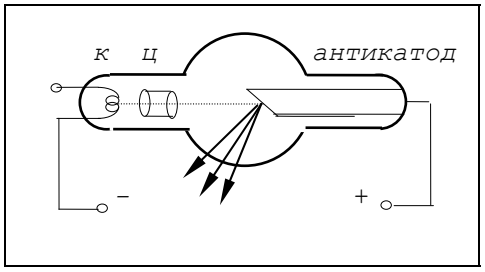
Действительно, в основе доказательства лежит принятое априори предположение, что фольге возбуждается *один* атом, что именно излучение *этого* атома фиксируется счетчиком. Но картина происходящих процессов может быть совершенно иной, более сложной.

Под действием слабого излучения источника в фольге могут возбуждаться некоторые случайные *группы* атомов. В результате интерференции угловая диаграмма их излучения совершенно необязательно симметрична по отношению к счетчикам, что и приведет к неодновременному их срабатыванию.

И тем не менее, предлагаемый способ объяснения результатов опыта на основе гипотезы о распространении элекиромагнитного излучения в виде фотонов очень удобен и нет никаких оснований от него отказываться.

16.2. Энергетические соотношения

При облучении быстрыми электронами некоторых веществ наблюдается коротковолновое электромагнитное излучение ($10^{-5} \div 10^{2}$ ***нм***). Это излучение получило название рентгеновских лучей.



Устройство рентгеновской трубки показано на рисунке. Вылетающие из раскаленного катода электроны разгоняются приложенным к аноду напряжением (анод рентгеновской трубки обычно называют антикатодом). Электрод в виде цилиндра предназначается для фокусировки пучка электронов.

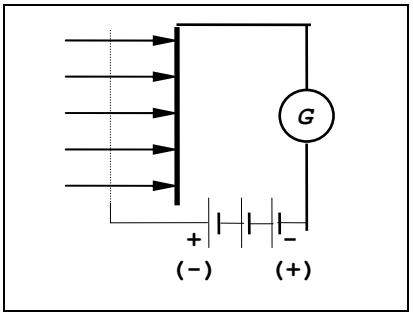
Ускоренные приложенным к антикатоду напряжением электроны тормозятся в антикатоде, и в результате возникает так называемое тормозное рентгеновское излучение. Обычно в излучение превращается лишь незначительная часть энергии потока электронов (единицы процентов). Чтобы получить достаточно интенсивное излучение необходимо отводить от антикатода выделяющееся тепло. Сам антикатод по этой же причине делается достаточно массивным.

Детали процесса излучения электромагнитной волны при торможении быстрых электронов весьма сложны и не представляют для нас особого интереса. Рентгеновское излучение интересно для нас тем, что в этом процессе наблюдается так называемая коротковолновая граница излучения. В виде кванта может реализоваться часть энергии электрона, но не более самой этой энергии. Если напряжение на трубке равно U, то

$$h\omega \le eU .$$

Таким образом, имеется некоторая предельно большая частота или некоторая предельно малая длина волны - коротковолновая граница излучения.

С использованием понятия фотона объяснение этого эффекта оказывается очень естественным: при взаимодействии быстрого электрона с веществом антикатода рождается частица, называемая фотоном, энергия которого $\hbar\omega$ и, это кажется вполне естественным, она не может быть больше энергии электрона eU.



В определенном смысле обратным излучению рентгеновских лучей является фотоэффект. В этом случае на некоторой поверхности происходит поглощение квантов света (фотонов), в результате чего с поверхности вылетают электроны.

Металлический электрод, подключенный к отрицательному полюсу источника питания, содержит свободные электроны. Они не покидают электрод самопроизвольно, поскольку для этого необходима дополнительная энергия A - так называемая *работа выхода*. Заметный выход электронов из металла (термоэлектронная эмиссия) наблюдается лишь при достаточно высокой температуре.

При освещении электрода из него вылетают электроны, достигающие затем положительно заряженного электрода - в цепи протекает ток, который фиксируется гальванометром G.

Но ток протекает и при смене полярности напряжения на электродах, хотя при уменьшении разности потенциалов между электродами и, тем более, при смене его знака ток уменьшается.

У вылетающих из электрода электронов энергия (как показывает опыт) не может быть больше энергии фотона $\hbar\omega$. Поэтому

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2} + A .$$

Это соотношение называется формулой Эйнштейна.

16.3. Эффект Комптона

Еще одним и, пожалуй, наиболее эффектным проявлением корпускулярных свойств электромагнитного излучения является эффект Комптона. Заключается он в изменении частоты (т.е. энергии) фотона после "упругого столкновения" с электроном. Но прежде, чем перейти к выводу соответствующего выражения, поговорим немного об энергии и импульсе в релятивистской механике.

Выражение для импульса, собственно, остается неизменным, лишь вместо "просто" массы (иначе - массы покоя) в него входит некоторая масса $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$, зависящая от скорости движения тела:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ;$$

При малой скорости движения $v \ll c$ выражение для импульса переходит в "обыкновенное", используемое в нерелятивистском приближении, масса в нем считается константой.

Несколько сложнее обстоит дело с релятивистским выражением для энергии тела. Здесь вводится понятие энергии покоя m_0c^2. Собственно, это выражение остается справедливым и при движении тела, только вместо массы покоя m_0 записывается масса $m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

При малой скорости движения $v \ll c$ в разложении квадратного корня в знаменателе можно ограничиться первыми двумя членами:

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) = m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} .$$

Это выражение можно "прочитать" таким образом: при малых скоростях движения энергия тела представляет собой сумму энергии покоя и "обычной" нерелятивистской кинетической энергии.

Для наших целей выражение для кинетической энергии тела удобно записать иначе:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} .$$

Действительно,

$$c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = c\sqrt{\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + m_0^2c^2} =$$

$$= c\sqrt{\frac{m_0^2v^2 + m_0^2c^2 - m_0^2v^2}{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Для решения задачи о столкновении фотона и электрона необходимо записать законы сохранения:

$$\hbar\omega + m_ec^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m_e^2c^2}; \qquad \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}.$$

Воспользовавшись соотношением $k = \omega/c$, преобразуем первое из уравнений:

$$\hbar k + m_ec = \hbar k' + \sqrt{p^2 + m_e^2c^2}; \qquad \sqrt{p^2 + m_e^2c^2} = \hbar(k-k') + m_ec;$$

$$p^2 + \cancel{m_e^2c^2} = \hbar^2(k-k')^2 + \cancel{m_e^2c^2} + 2\hbar(k-k')\cdot m_ec;$$

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2) - 2\hbar^2kk' + 2\hbar(k-k')\cdot m_ec.$$

С другой стороны, из закона сохранения импульса получаем:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} - \hbar\vec{k}'; \qquad p^2 = \hbar^2\left(k^2 + k'^2 - 2(\vec{k}\vec{k}')\right) = \hbar^2(k^2 + k'^2) - 2\hbar^2kk'\cos(\theta).$$

Приравняем полученные выражения для квадрата импульса электрона после столкновения и проведем несложные преобразования:

$$\cancel{\hbar^2(k^2 + k'^2)} - \underline{2\hbar^2kk'} + 2\hbar(k-k')\cdot m_ec = \cancel{\hbar^2(k^2 + k'^2)} - \underline{2\hbar^2kk'\cos(\theta)};$$

$$\frac{1}{k'} - \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{m_ec}(1-\cos(\theta)); \qquad \frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_ec}(1-\cos(\theta)).$$

Имеющая размерность длины величина $2\pi\hbar/m_ec = \lambda_C$ называется Комптоновской длиной волны электрона. Мы бы не затевали этого разговора, если бы экспериментально определенное значение λ_C **= 0,00243 нм** не совпадало с теоретическим значением λ_C.

Лекция 19

17. Гипотеза де Бройля

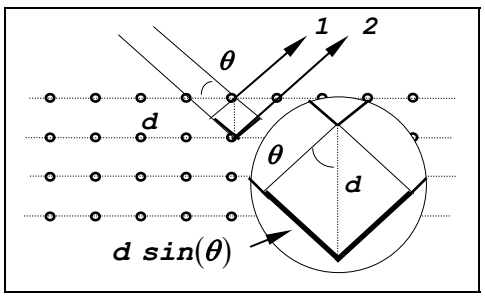
До того, как было введено понятие квантования, когда еще не говорили о кванте света - фотоне, физики фактически уже "работали" с квантами поля - элементарными частицами. Только их квантами еще не называли. Вот что пишет о квантах "вообще" В.Вайскопф:

"*Поля – это способы выражения сил между частицами. Притяжение между двумя электрическими зарядами может быть также описано как действие поля одного из них на поле другого заряда. Но поле – не математическая выдумка, оно так же реально, как источник частиц, и можно говорить о его энергии и т.д.*

Далее, каждое поле имеет квант. Когда поле распространяется в пространстве, испускается в виде излучения, оно распространяется в виде квантов. Самым известным квантом поля является фотон – квант электромагнитного поля." [1]

Однако, эта мысль была сформулирована Вайскопфом много позже. При зарождении квантовой физики это были просто "*элементарные частицы*". И вот тут де Бройль сформулировал, вообще говоря, странную гипотезу. Он предположил, что волновые свойства присущи не только частице-фотону, что это общее свойство частиц: все они должны обладать волновыми свойствами. Появилось понятие дуализма: микрообъекты предлагалось рассматривать и как частицы, и как волну.

В рамках такого рассмотрения частице приписываются энергия $\hbar\omega$ и импульс $\hbar k$ - точно так, как и фотону. Что касается частоты, то у нас, в общем, нет возможности измерить собственную частоту частицы (об этом мы поговорим позже). Но вот длина волны может быть измерена с помощью наблюдения дифракции на кристаллической решетке.



Этот вид дифракции мы с Вами еще не исследовали. Кристалл в этом случае рассматривается как система плоскостей атомов, от которых при определенных условиях происходит зеркальное отражение падающих волн. При каких именно?

В этой задаче падение луча на поверхность кристалла принято характеризовать не углом падения, а углом скольжения θ. Из рисунка видно, что разность хода лучей **1** и **2** составляет $2d\sin(\theta)$. Приравняв ее целому числу длин волны, мы получаем формулу Брэгга-Вульфа

$$2d\sin(\theta) = m\lambda \quad -$$

это и есть условие зеркального отражения волны.

В соответствии с гипотезой де Бройля вводится длина волны де Бройля:

---

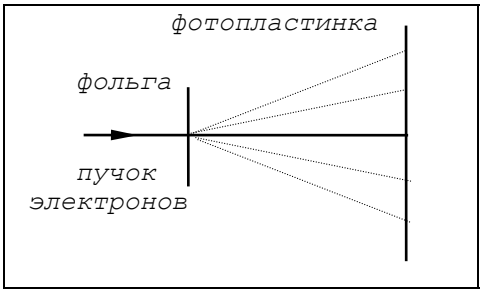
[1] [1]: В.Вайскопф, "Физика в двадцатом столетии", М., Атомиздат, 1977г, с. 41.

$$\boldsymbol{p} = \mathrm{h}\boldsymbol{k} = \mathrm{h}\frac{2\pi}{\lambda}; \qquad \lambda = \frac{2\pi\mathrm{h}}{\boldsymbol{p}}.$$

Волновые свойства частиц были подтверждены многочисленными экспериментами - сначала для электронов, а затем и для атомных и молекулярных пучков. Эксперименты проводились разные, но, пожалуй, особо наглядным представляется такой.

Пучок моноэнергетических электронов, иначе, - пучок электронов, прошедших одинаковую разность потенциалов, падает на металлическую фольгу. Металл, как правило, имеет поликристаллическую структуру, и среди множества мелких кристалликов находится достаточное их количество с "нужной" ориентацией, а именно такой, которая обеспечивает зеркальное отражение электронной волны определенной длины λ.

Заметьте, не вообще мелкие кристаллики, образующие поликристаллическую структуру металла, обеспечивают зеркальное отражение волны, а лишь ориентированные так, чтобы для них выполнялось условие Брэгга-Вульфа. В результате значительная часть электронов после прохождения фольги движутся по некоторым коническим поверхностям, пересечения которых с экраном представляют собой окружности.



Фиксирование места попадания электрона на экран может производиться с помощью фотопластинки, на которую он оказывает такое же действие, что и фотон.

Получающаяся на экспонированной фотопластинке картина в виде концентрических колец оказывается подобной той, которая получается при облучении фольги рентгеновскими квантами.

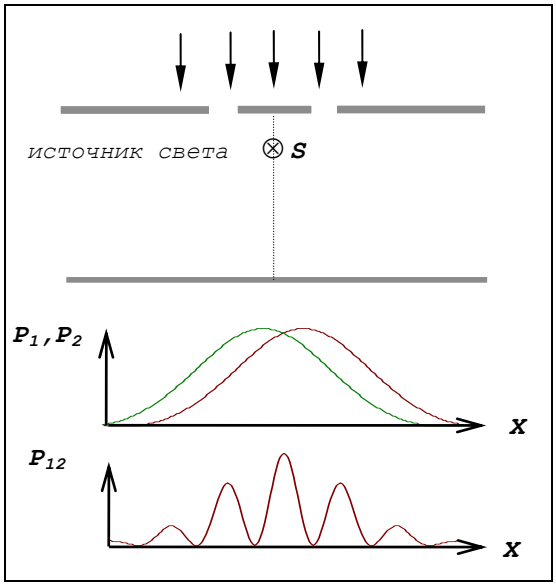
Правда, остается не совсем понятным, зачем обычно производится такое сопоставление. Именно из опытов по дифракции мы узнаем, что рентгеновские кванты имеют волновую природу. Такие же опыты с электронами доказывают их волновую природу независимо от того, как ведут себя рентгеновские кванты-фотоны.

18.1. Дифракция электрона на двух щелях

При разговоре о дифракции электрона традиционно много внимания уделяется рассуждениям о том, как происходит дифракция электрона на двух щелях.

Обсуждается, что будет наблюдаться на фотопластинке, если перекрыть одну из щелей. Ну что может наблюдаться? Раз электрон обладает волновыми свойствами (факт безусловно доказанный экспериментально), будет наблюдаться дифракция волны на одной щели. А если открыть обе щели? Естественно, мы увидим картину дифракции на двух щелях. Но проблема видится в том, через *какую щель* проходит при этом электрон.

Этой задаче действительно уделяется много внимания, и мы не можем ее обойти, хотя лично я не вижу, чем такая модельная задача особенно интересна. И возникающие при этом сложности скорее связаны с не очень корректным применением сразу двух приближений в описании электрона - волнового и корпускулярного. Ставить вопрос о том, через какую щель прошел электрон, можно только для электрона-частицы. Если мы при этом будем использовать и волновое описание электрона, то, уж конечно, столкнемся с трудностями.



На рисунке показана схема обсуждаемого опыта. Если закрыть одну из щелей, на которые падает поток электронов, то мы сможем наблюдать одну из кривых плотности вероятности распределения электронов на экране - P_1 или P_2. При обеих открытых щелях кривая зависимости плотности вероятности от координаты P_{12} будет иной и - не будет суммой двух первых кривых.

Обсуждая этот мысленный эксперимент, Фейнман в своих "Лекциях" предлагает организовать "наблюдение" за электроном. Для определения его положения используется помещенный за щелями источник света ***S***. Электрон должен рассеивать свет, и по тому, у какой щели мы увидим вспышку, мы, вроде, можем судить о том, через какую из них он пролетел.

При этом делается (справедливое, конечно) утверждение, что как только мы сможем это определить, т.е. увидим вспышку, то вероятность попадания электрона в точку экрана с некоторой координатой изменится - она будет отвечать кривой, подобной $P_1(x)$ или $P_2(x)$, но не $P_{12}(x)$. И из этого обстоятельства делается вывод:

"Если электроны не видимы, то возникает интерференция!" [2].

На мой взгляд, вывод должен быть несколько более скромным: *"Интерференция, может, и имела место, но произошло еще кое-что, взаимодействие электрона с квантом света, что не безразлично для его дальнейшего движения к экрану."* При такой интерпретации ничего загадочного в изменении кривой распределения попавших на экран электронов нет. Собственно, об этом Фейнман и говорит:

"Должно быть, электроны - вещь очень деликатная; свет, рассеиваясь на электронах, толкает их и меняет их движение". [3]

Но самое важное это то, что каким-то загадочным образом *влияние акта измерения* оказывается связанным с его *точностью*. В обсуждении эксперимента предлагается увеличить длину волны света. При этом, естественно, уменьшается точность определения положения электрона. И только при таком уменьшении точности, что уже становится невозможным определить, через какую из щелей прошел электрон, наблюдение вспышек рассеянного света не будет влиять на интерференционную картину. И Фейнман связывает это обстоятельство с принципом неопределенностей:

"В терминах нашего эксперимента он звучит следующим образом: "Невозможно соорудить аппарат для определения того, через какое от-

---

[2] [2]: Р.Фейнман,Р.Лейтон,М.Сэндс, "Фенмановские лекции по физике", вып.3, М., Мир, 1977, гл.37, с.214.

[3] [2],с.215.

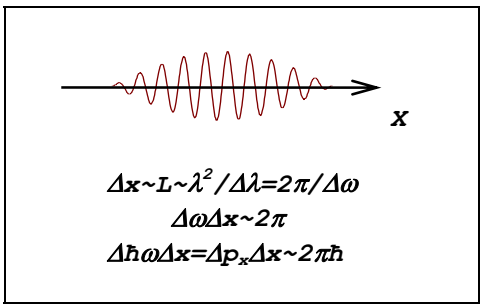
верстие проходит электрон, не возмущая электрон до такой степени, что интерференционная картина пропадает." [4]

Мы с Вами еще не говорили о принципе неопределенностей, и сейчас самое время сказать о нем несколько слов.

18.2. Соотношения неопределенностей

Соотношения неопределенностей обычно трактуется как *невозможность одновременного точного измерения значений некоторых пар величин*, описывающих движение частицы:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2; \qquad \Delta E \Delta t \geq \hbar/2 .$$



Забавно, но с подобной проблемой экспериментаторы сталкиваются не только в квантовой механике. При рассмотрении движения цуга волн в качестве оценки для длины когерентности, о которой мы говорили раньше, можно взять его длину L. Тогда

$$L \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 2\pi c/\Delta\omega = 2\pi/\Delta k .$$

Здесь Δk - неопределенность волнового числа.

Будем также считать, что длина цуга является неопределенностью его положения - волновые колебания могут быть обнаружены на длине $\Delta x \sim L$. Тогда

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 2\pi ; \qquad \Delta\omega \cdot (\Delta x/c) = \Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi .$$

Означают эти выражения, что длину волны короткого цуга или частоту волны за малое время нельзя измерить с произвольно высокой точностью. Этот факт хорошо известен специалистам. А с учетом того, что $p = \hbar k$; $E = \hbar\omega$, эти выражения, можно сказать, совпадают с соотношениями неопределенностей.

Но соотношения неопределенностей значат много больше, чем невозможность точно определить значения некоторых величин. Не надо, видимо, доказывать, что неопределенность (погрешность) в определении импульса не больше, чем сам импульс. Таким образом, локализация частицы в малом объеме автоматически означает большую ее энергию.

Приведенные ниже цитаты взяты из интервью Вайскопфа журналу "Intern. Sci. Tecnol.", 1963, v.62. Названо оно "Квантовая лестница" и содержит весьма увлекательный разговор о квантовой механике и, в частности, о соотношении размеров объекта и некоторых характерных энергий. По существу, речь идет о соотношениях неопределенностей:

"*Квантовая теория говорит, что атом неделим, если энергия, передаваемая ему, лежит ниже некоторого порога. Значит, если сталкиваются атомы с энергиями, меньшими пороговой, то они разлетаются без какого-либо изменения, в точности таком же состоянии, в каком они находились раньше. Это уже новая, квантовомеханическая идея.*" [5]

---

[4] [2], с.215.
[5] [1], с.48.

И далее:

"Я начал с атома, но имеется еще ряд ступенек вниз по квантовой лестнице, очень важных для нашей жизни. Молекулы, макромолекулы, кристаллы. Все живое состоит из макромолекул. Чем ниже вы спускаетесь по квантовой лестнице, тем более ярко выраженной становится специфичность структур: ядро-атом-молекула-жизнь... Существование кванта является важнейшей предпосылкой, обусловливающей существование структур в природе. Частицы объединяются в определенные группы, мы имеем квантовые орбиты в ядрах, квантовые орбиты в атомах, квантовые орбиты в молекулах и квантовые орбиты в макромолекулах. Наши наследственные признаки есть не что иное, как квантовые состояния отдельных частей цепи ДНК. Появление каждую весну цветов определенной формы в некотором смысле косвенно подтверждает существование определенных квантовых орбит в молекуле ДНК - следствие идентичности и единственности квантовых орбит." [6]

Разумеется, орбитами В.Вайскопф называет здесь определенные квантовые состояния, обсуждением которых мы еще будем заниматься.

18.3. Уравнение Шрёдингера

Поведение волны должно описываться волновым уравнением, и таким уравнением для микрочастицы является уравнение Шрёдингера.

При решении уравнения мы ограничимся лишь плоскими волнами и потому запишем его в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+U\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

В этом уравнении m - масса частицы, i - мнимая единица и U - потенциальная энергия частицы. Функция Ψ называется волновой функцией или просто Ψ-функцией.

Согласно гипотезе де Бройля, полная энергия частицы связана с частотой соотношением $E=\hbar\omega$. Поэтому, если U не зависит от времени, волновая функция Ψ может быть представлена как произведение некоторой функции $\psi(x)$, зависящей от координаты, и функции времени $exp(-i\omega t)=exp\left(-i\left(E/\hbar\right)t\right)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\left(\psi(x)\cdot exp\left(-i\left(E/\hbar\right)t\right)\right)}{\partial x^2}+U\left(\psi(x)\cdot exp\left(-i\left(E/\hbar\right)t\right)\right)=i\hbar\frac{\partial\left(\psi(x)\cdot exp\left(-i\left(E/\hbar\right)t\right)\right)}{\partial t}.$$

[6] [1], с.48,49.

Выполнив дифференцирование по времени и сократив на множитель $\exp\left(-i\left(E/\hbar\right)t\right)$, мы получим уравнение Шрёдингера в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U\psi=E\psi; \qquad \underline{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-U\right)\psi=0}.$$

Выражение в скобках по смыслу представляет собой кинетическую энергию частицы.

Как следует из уравнения, движение свободное электрона может быть описано плоской волной вида

$$\psi=\psi_0\exp(ikx); \qquad k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(E-U\right)}=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\frac{mu^2}{2}}=\frac{mu}{\hbar};$$

$$\omega=\frac{E}{\hbar}; \qquad \Psi=\psi_0\exp\left(-i\left(\omega t-kx\right)\right).$$

В общем, обыкновенная волна. Не совсем обыкновенным и совсем неясным остается *только* физический смысл волновой функции Ψ. И об этом нам предстоит еще большой разговор. А пока - несколько слов о фазовой и групповой скоростях.

Групповая скорость

$$\frac{d\omega}{dk}=\frac{dE}{dp}=\frac{d\left(U+mu^2/2\right)}{dmu}=u$$

представляет собой скорость электрона в самом обычном смысле этого слова. А вот с фазовой скоростью не все так просто, как хотелось бы.

Казалось бы, здесь не должно возникнуть никаких проблем. Фазовая скорость

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{\hbar\omega}{\hbar k}=\frac{E}{p}=\frac{U+p^2/2m}{p}.$$

Но в это выражение входит потенциальная энергия, которая определяется в физике с точностью до произвольного слагаемого. Следовательно, и частота ω определена с точностью до произвольного слагаемого. И у нас нет средства экспериментально определить, например, для электрона справедливость выражения $E=\hbar\omega$ или измерить фазовую скорость.

Лекция 20

18.4. Стоячая волна

Как и всякая другая волна, электронная волна $\Psi(x,t)$ может быть стоячей волной. Для этого нам необходимо сложить две волны с одинаковыми амплитудами, движущиеся навстречу друг другу:

$$\psi_0 \exp\left(-i(\omega t - kx)\right) + \psi_0 \exp\left(-i(\omega t + kx)\right) =$$
$$= \psi_0\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)e^{-i\omega t} = \underline{2\psi_0 \cos(kx)e^{-i\omega t}}\,.$$

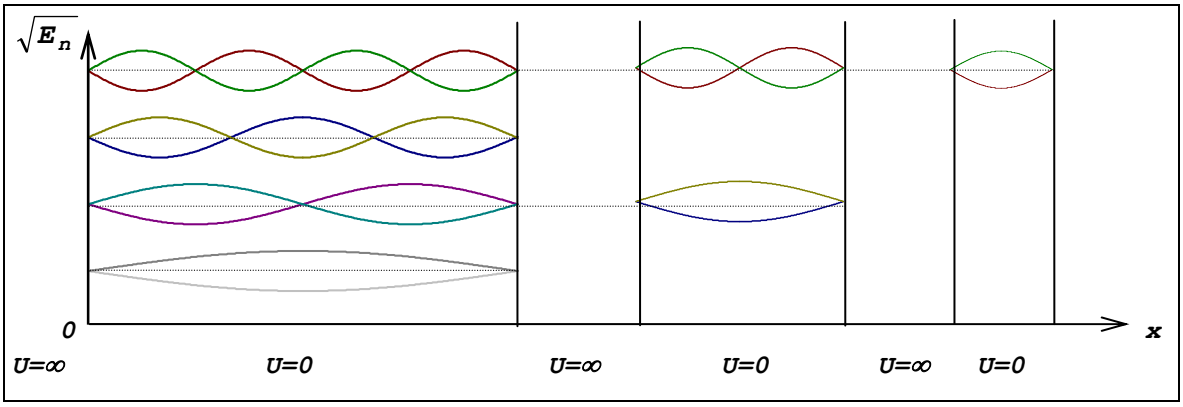
Волна как волна, с узлами и пучностями, но вместо, скажем, закрепленных концов струны в точках с координатами $x=-1/2$ и $x=+1/2$ нам при значениях координат $x\le -1/2$ и $x\ge +1/2$ нужно иметь $U=\infty$ - правее и левее выделенного интервала возможно решением будет $\psi = 0$. Используя условие непрерывности Ψ-функции, можно определить значение (комплексной) амплитуды ψ_0.

Для простоты внутри интервала будем считать $U=0$. Ведь потенциальная энергия определена с точностью до произвольной константы.

Для существования стоячей волны необходимо выполнение условия $k_n l = n\pi$ и, следовательно, при $U=0$ будет:

$$p_n = \hbar k_n = \hbar\frac{n\pi}{l}; \qquad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2\,.$$

Мы получили весьма важный результат: электрон *в состоянии стоячей волны* может иметь лишь вполне определенные дискретные значения энергии E_n. Энергия электрона квантуется! И при этом минимальное значение его энергии определяется линейными размерами потенциальной ямы, что существенно для дальнейшего.



Любопытно провести такое исследование полученного результата. Подсчитаем силу, с которой электрон действует на стенку потенциальной ямы.

Очевидно,

$$F_x = -\frac{dE_n}{dx} = -\frac{dE_n}{dl} = 2\frac{\pi^2 h^2}{2ml^3} n^2 = E_n \frac{2}{l}.$$

А теперь попробуем получить выражение для силы F_x на основе корпускулярных представлений. При отражении электрона от стенки последней будет передан импульс $2p$. При этом частота ударов определяется временем движения электрона между ударами

$$t = \frac{2l}{u} = 2\frac{ml}{p}.$$

Выражение для силы мы получим, если разделим переданный импульс на это время:

$$F_x = \frac{2p}{t} = \frac{p^2}{2m}\frac{2}{l} = E\frac{2}{l}.$$

Мы получили для силы то же значение, но это не означает, что в этой задаче волновой и корпускулярных подходы равноправны. При корпускулярном рассмотрении энергия электрона E произвольна, при волновом - она квантуется.

Поэтому, хотя волновое представление для нас, может, в чем-то не до конца понятно, корпускулярное представление следует назвать просто непонятным. При его использовании мы не сможем объяснить квантование энергии электрона.

К задаче о стоячих волнах Ψ-функций мы еще вернемся, а сейчас просто необходимо поговорить о смысле этой функции.

18.5. Физический смысл волновой функции

Высказанная де Бройлем гипотеза была проверена экспериментально, Шрёдингер написал волновое уравнение для некоторой Ψ-функции, полученные с помощью уравнения результаты для длины волны также подтверждаются экспериментом. И осталось *всего лишь* понять, что это за функция, колебания *чего* распространяются при движении электрона.

Здесь мы с Вами вступаем на весьма зыбкую почву. Говоря о смысле Ψ-функции, легко попасть в какую-нибудь ловушку, высказать утверждение, которое вступает в противоречие (или кажущееся противоречие) с некоторыми из многочисленных экспериментально наблюдаемых эффектов. "Ибо сказано: мысль изреченная есть ложь". И хотим мы этого или не хотим, мы будем пытаться объясниться на "старом" языке, используя знакомые и привычные понятия и термины. Другого языка мы просто не знаем:

"*Раз поведение атомов так не похоже на наш обыденный опыт, то к нему очень трудно привыкнуть. И новичку в науке, и опытному физику - всем оно кажется своеобразным и туманным. Даже большие ученые не понимают его настолько, как им хотелось бы, ...*" [1]

Вдумайтесь в эти слова. Сказано, собственно, что даже большие ученые *пытаются объяснить поведение квантового микрообъекта с*

[1] [1] : Р.Фейнман,Р.Лейтон,М.Сэндс, "Фенмановские лекции по физике", вып.3, М., Мир, 1977, гл.37, с.202.

помощью представлений, справедливых для макрообъекта. Это безнадежное занятие, мы подошли к той границе, за которой действуют уже другие законы и требуется иной способ мышления. Но - хочется продолжать рассуждать по-старому. Такие рассуждения не приводят к правильным результатам и отсюда происходит ощущение непонятности.

Эта непонятность поведения атомов и других мельчайших частиц вела "*ко все большему замешательству среди физиков*". И вот,

"*В 1926-1927 гг. оно было устранено работами Шрёдингера, Гейзенберга и Борна. Им удалось в конце концов получить непротиворечивое описание поведения вещества атомных размеров.*" [2]

Это "непротиворечивое описание" в общих чертах таково. Квантовое поведение микрочастицы описывается волновым уравнением Шрёдингера, для нее справедлив принцип неопределенностей, но при этом волновой функции приписывается чисто математический смысл:

"*... волновая функция, удовлетворяющая уравнению, не похожа на реальную волну в пространстве; с этой волной нельзя связать никакой реальности, как это делается со звуковой волной.*" [3]

Ψ-волну для электрона часто называют просто электронной волной. Но употребления этого термина в то же время всячески пытаются избежать. Вместо этого говорят про волну *амплитуды плотности вероятности*. Смысл термина вот в чем. Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Поток энергии при распространении волны пропорционален квадрату ее амплитуды. Подобно этому пропорциональной квадрату амплитуды плотности вероятности оказывается некоторая *плотность вероятности*.

Собственно, одну трудность заменили другой. На основе классических представлений нельзя понять, как ведет себя электрон в атоме. Но разве можно понять, как *не связанная ни с какой реальностью* волна амплитуды плотности вероятности дифрагирует на *реальной* кристаллической решетке? Однако, такая "непонятность" мало беспокоила теоретиков.

Констатировав, что на "старом" языке классической физики объяснить вновь открытые явления не удается, нам предлагается не новый язык, а просто говорят: "*Поведение электрона описывается* Ψ*-функцией, которая физического смысла не имеет, она имеет лишь математический смысл.*"

Не удивительно, что "*новичку*" при знакомстве с квантовой физикой "*все кажется своеобразным и туманным*". И при этом саму непонятность предлагаемых объяснений предлагается считать особенностью, свойством квантовой физики.

Рискуя вызвать гнев коллег - физиков, я хочу все-таки попытаться хоть что-то сделать понятным. Впрочем, я буду рассуждать, а соглашаться со мной или нет - Ваше дело. Думайте.

19.1. Как нам это объясняют

Всякого рода объяснения я склонен делить на такие, которые понять *трудно*, и такие, которые *понять нельзя*. Вот какие объяснения

[2] [1] : с.202
[3] [2] : Р.Фейнман,Р.Лейтон,М.Сэндс, "Фенмановские лекции по физике", вып.8, М., Мир, 1978, гл.1, с.15.

я лично не понимаю и, мне кажется, понять их нельзя. Для начала цитата из учебника (!) И.В.Савельева:

"*Иногда соотношение неопределенностей получает следующее толкование: в действительности у микрочастицы имеются точные значения координат и импульсов, однако ощутимое для такой частицы воздействие измерительного прибора не позволяет точно определить эти значения. Такое толкование является совершенно неправильным.*" [4]

И чуть дальше:

"*Согласно Борну квадрат модуля волновой функции определяет вероятность* dP *того, что частица будет обнаружена в объеме* dV*:*

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi^* \Psi dV . \qquad (14.2)$$

Интеграл от выражения (14.2), взятый по всему пространству, должен равняться единице:

$$\int \Psi^* \Psi dV = 1 . \qquad (14.3)$$

Действительно, этот интеграл дает вероятность того, что частица находится в одной из точек пространства, которая равна единице." [5]

Как совместить утверждение, что частица с вероятностью, равной единице, *находится* в одной из точек пространства (вторая цитата), и что частица *не может иметь точных координат* (первая цитата)? Или частица как-то может находиться в некоторой точке пространства *без* точных координат?

У Фейнмана, разумеется, столь противоречивых утверждений на соседних страницах нет. Но и в его изложении проблемы порой встречаются слова странные, которые скорее запутывают читателя, чем помогают что-нибудь понять. По поводу пулеметной стрельбы по щели он пишет:

"*Если движение всего вещества, подобно электронам, нужно описывать, пользуясь волновыми понятиями, то как быть в нашем первом опыте? Почему мы не увидели там интерференционной картины? Дело, оказывается, в том, что у пуль длина волны столь незначительна, что интерференционные полосы становятся очень тонкими. Столь тонкими, что никакой детектор разумных размеров не разделит их на отдельные максимумы и минимумы.*" [6]

Неужели Фейнман всерьез думает и предлагает думать нам, что рикошетирование пуль на краях щели *хоть как-то* связано с интерференцией? И почему "*движение всего вещества ... нужно описывать, пользуясь волновыми понятиями*"?

Мы уже говорили о том, что Ψ-функция по мнению Фейнмана не может быть связана с какой-то реальностью. Более элегантно выражается по этому поводу Гейзенберг (цитата приводится Вайскопфом [7]):

---

[4] [3]: И.В.Савельев, Курс физики, т.3, М., Наука, с.59.
[5] [3], с.61.
[6] [1], с.216.
[7] [4]: В.Вайскопф, "Физика в двадцатом столетии", М., Атомиздат, 1977г, с.41.

«Концепция объективной реальности элементарных частиц, следовательно, курьезным образом испаряется, обращаясь не в туман, не в какое-то новое неясное или еще не постигнутое понятие реальности, а в прозрачную ясность математики, которая теперь соответствует не поведению атомных частиц, а, скорее, нашим знаниям об этом поведении.»

И В.Вайскопф возражает против такой концепции тоже весьма элегантно:

"Я не согласен с заявлением о том, что в атомном мире существует какой-то недостаток реальности. В конце концов, видимый реальный мир состоит из тех же самых атомов, обнаруживающих такое странное поведение. Действительно, атомный мир отличается от нашего привычного мира сильнее, чем когда-то ожидали; он обладает более богатым набором явлений, чем можно вообразить, пользуясь классическими представлениями. Но все это не делает его менее реальным." [8]

И еще несколько слов о том, как, скажем так, *небрежное* объяснение затрудняет понимание существа дела. Как выяснилось, электрон обладает спином - собственным моментом импульса. И по поводу невозможности объяснения существования этого последнего в рамках классической физики приводится обычно такое обоснование.

Магнитный момент электрона, который "вращается" по орбите, связывается с механическим моментом $\boldsymbol{M}$ (мы изменили принятое нами ранее обозначение для момента импульса) соотношением

$$\frac{\mu}{M} = -\frac{e}{2m_e c}.$$

Однако, для спиновых моментов

"... отношение собственных магнитного и механического моментов в два раза больше, чем для орбитальных моментов:

$$\frac{\mu_S}{M_S} = -\frac{e}{m_e c}. \qquad (31.2)$$

Таким образом, представление об электроне как о вращающемся шарике оказалось несостоятельным." [9]

Конечно, отношение к написанному в книжках должно быть уважительным, но не обязательно все написанное принимать на веру. Вот и эта "трудность" с вдвое большим отношением моментов, если немного подумать, может быть легко преодолена.

Представим себе электрон в виде заряженной сферы очень маленького радиуса и пусть масса этой сферы ровно в два раза меньше массы электрона. Другая половина массы будет приходиться на электрическое поле, от электрона, естественно, неотделимое.

Подсчитаем энергию поля и приравняем ее половине массы электрона:

---

[8] [4], с.41.
[9] [3], с.108.

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\right)^2 = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4};$$

$$W = \int_{r_0}^{\infty}\left(\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{1}{r^4}\right)\cdot\left(4\pi r^2 dr\right) = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_0} = \frac{m_e}{2}c^2;$$

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82\cdot 10^{-15}\,\text{м}.$$

Эта величина приводится в справочниках как "классический радиус электрона". Если предположить, что это и есть радиус нашей заряженной вращающейся сферы, то, поскольку при ее вращении электрическое поле не вращается, а удельный заряд сферы вдвое больше, чем у электрона (масса в два раза меньше), мы как раз и получим нужное нам отношение $\mu_S/M_S = -e/m_e c$.

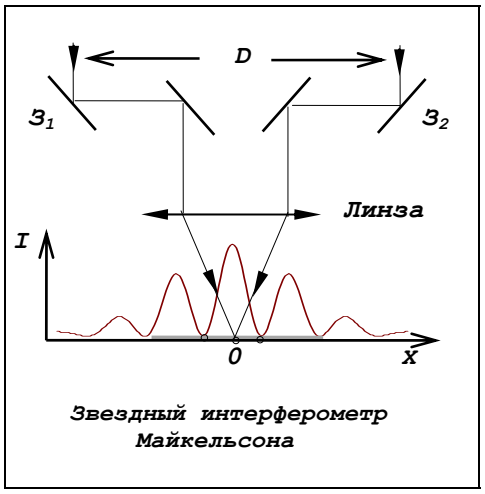
Я *ни в коем случае не предлагаю* Вам представлять себе электрон в виде "вращающегося маленького шарика"! Я просто хочу обратить внимание на неправомочность утверждения "оказалось несостоятельным".

Лекция 21

19.2. Как нам это понимать

Итак, было сказано предельно ясно: трудности понимания квантовой физики возникают потому, что мы пытаемся применить старые представления к новым явлениям. Понять квантовые явления, разумеется, не просто, как, впрочем, непросто было понимать и классические воззрения при знакомстве с ними. Но ясно одно - что бы что-нибудь понять в квантовой физике нам следует применить какие-то новые воззрения. К великому сожалению, все объяснения обычно сводятся лишь к бесконечному повторению одной мысли: понять новое нельзя на основе старых представлений. Но в чем же заключаются новые представления?

Мир един и физика едина. И классическая физика и квантовая, - обе они описывают один и тот же мир, в котором мы живем. И к некоторому хотя бы пониманию *квантовых* явлений *не может* привести бесконечное их *противопоставление*. Попробуем, по возможности аккуратно, хотя бы начать создавать в наших головах эти новые представления.



Звездный интерферометр Майкельсона

Во многих книжках рассматривается модельная задача о дифракции электронов на двух щелях. Мне более симпатична задача о работе звездного интерферометра Майкельсона. Все-таки это реальный прибор, в работе которого участвуют несколько более понятные с точки зрения физики кванты - фотоны.

Свет от звезды очень слаб, но мы можем ослабить его еще больше. Тогда можно говорить о поглощении атомами фотоэмульсии пластинки, на которой получается изображение дифракционной картинки, первого кванта, второго и т.д.

Во-первых, видимо, нам придется отказаться от *буквального* понимания гипотезы о распространении света в виде микрочастиц - фотонов. Если на зеркала попадают *разные* фотоны, то трудно представить себе, что колебаний электрического поля в них *синфазны*. Но, с другой стороны, расстояние между зеркалами измеряется метрами, и пришедшая в точку *поглощения* кванта порция энергии $\hbar\omega$ не может принадлежать одному фотону, испущенному далекой звездой в направлении нашего интерферометра - даже если мы представим себе фотон выросшим до таких размеров, в зеркалах не отразится, "провалится" средняя часть фотона. Не видно и способа определить, от какого из зеркал отразился этот *поглощенный фотопластинкой* квант света.

В то же время кажется уместным и более интересным вопрос, чем определяется "выбор" точки, в которой происходит поглощение кванта. При поглощении большого количества квантов кривая степени почернения фотопластинки будет соответствовать кривой дифракции Фраунгофера на двух щелях с максимумами в точках $x_m = m\lambda f/D;\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ полученная на основе волновых представлений. Но каким образом первый, второй и т.д. кванты "узнают", что им следует поглощаться чаще

вблизи одного из максимумов кривой, а не вблизи минимума? Боюсь, что и на этот вопрос мы не сможем ответить вразумительно. Нам придется констатировать факт, что рассчитанная кривая зависимости интенсивности света ***I(x)*** представляет собой лишь кривую распределения вероятности ***P(x)*** поглощения фотона. Это утверждение мы можем проверить экспериментально, проведя фотографирование с помощью интерферометра некой далекой звезды. Но дисциплина мышления требует говорить лишь о том, что мы можем проверить опытом.

По этому поводу, видимо, не следует сокрушаться - эта пара вопросов не составляет особого исключения, физика не может ответить и на множество других вопросов. Не так редко мы рассчитываем некий процесс "в общем", не зная ничего о его деталях. Важно выбрать правильное приближение, чтобы получить верный и полезный для практики результат. В данном случае это будет волновое приближение. На основе корпускулярных представлений решение задачи представляется, как минимум, затруднительным.

Подчеркну еще раз. На основе волновых представлений мы можем рассчитать *только вероятность* поглощения кванта света в той или иной точке. Деталей этого процесса, как и деталей прохождения кванта через зеркала, мы объяснить *не умеем*. Во всяком случае мы не сможем наблюдать эти процессы экспериментально - тем самым мы разрушили бы "*хрупкую индивидуальность квантового состояния*". Это, однако, не делает электромагнитное поле хоть в чем-то нереальным!

Мы легко можем допустить, что какие-то "внутренние" процессы происходят при поглощении кванта света. Но, собственно, в этой невозможности определить детали процесса прохождения фотона через щели и/или поглощения кванта, в этом и заключается один из важных элементов квантовомеханического представления поведения микрочастиц, нового способа мышления:

"*Главный пункт в подходе Бора заключается в опровержении того, что можно решить всю проблему, заглянув внутрь атомной структуры, что, применив тончайшие средства наблюдения, можно решить вопрос о том, является электрон волной или частицей. Природа устроена так, что никакое наблюдение крошечного объекта нельзя выполнить, не воздействуя на него. Квантовое состояние обладает характерной способностью ускользать от обычного наблюдения, так как сам акт такого наблюдения уничтожает условия существования квантового состояния.*"[1]

В этом суть. Быть может только можно выразиться чуть аккуратнее: вместо слова "*уничтожает*" воспользоваться словом "*изменяет*", поскольку квантовый объект не может существовать в неквантовом состоянии. И попытки понять, почему "*природа устроена так*" скорее запутает нас, чем прояснит ситуацию.

Как видите, речь мы ведем о дуализме, о двойственности представления света в виде волны или потока фотонов, но при таком подходе понятие дуализма приобретает несколько иной оттенок. Речь не идет о двойственности *природы* частицы-фотона, речь идет о двух возможных *приближениях* при описании кванта электромагнитного поля.

19.3. Парадокс Больцмана

[1] [4]: В.Вайскопф, "Физика в двадцатом столетии", М., Атомиздат, 1977г, с.58.

Создается впечатление, что квантовая физика описывает процессы “приблизительно”, не давая точных и однозначных ответов на некоторые вопросы. В.Вайскопф относит себя к старым противникам такого утверждения. Он считает, что как раз квантовая физика привнесла в науку о природе большую точностью

Главное, что квантовая физика сняла много вопросов, остававшихся без ответа в рамках классических представлений. Одна из решенных квантовой физикой задач - это разрешение парадокса Больцмана, о котором вспоминают не слишком часто:

“*... согласно классической механике, мы предполагаем, что в системе атомов, находящейся в тепловом равновесии при данной температуре, тепловая энергия должна быть равномерно распределена среди* ***всех*** *возможных видов движения. В куске нагретого вещества электроны должны вращаться быстрее, протоны внутри ядер должны колебаться более энергично, составные части протонов должны колебаться более энергично в пределах своих границ и т.д. Таким образом, удельная теплоемкость любого простого куска вещества должна быть чрезвычайно велика. В действительности же удельная теплоемкость имеет именно такое значение, которое можно получить, рассматривая только внешнее движение атомов. Было непонятно, почему тепловая энергия не проникает внутрь атома и не возбуждает его внутренние степени свободы. Парадокс Больцмана был сформулирован в 1892 г., задолго до создания квантовой механики. Но объяснения ему не было.*” [2]

Особенно остро сформулированная в парадоксе Больцмана проблема проявилась при анализе равновесного теплового излучения, когда создалась ситуация, получившая название “*ультрафиолетовой катастрофы*”. Квантование энергии стоячих волн снимает проблему и приводит к результатам, великолепно совпадающим с результатами эксперимента.

В этом главное: появившиеся в поле зрения физиков новые объекты - кванты, при всем их разнообразии, обладают одним общим свойством, не характерным для классических макрообъектов: они не могут быть разделены на части, за поведением которых нам хотелось бы проследить. И это фундаментальное их свойство:

“*Одной из главных особенностей классической физики является возможность делить каждый процесс на составные части. Любой физический процесс можно считать состоящим из последовательности составляющих его процессов. По крайней мере теоретически каждый процесс можно проследить шаг за шагом во времени и в пространстве. Орбиту электрона вокруг ядра можно представить в виде последовательности малых перемещений. Электрон можно считать состоящим из частей с меньшими зарядами. Но эту точку зрения следует отбросить, если мы хотим понять, что видим в природе...*” [3]

И к этому утверждению “примыкает” такое:

“*Здесь мы сталкиваемся с весьма важным фактом, заключающимся в том, что указанная невозможность выполнения некоторых измерений означает больше, чем простое техническое ограничение, которое в один прекрасный день может быть преодолено с помощью хитроумного оборудования.*” [4]

---

[2] [4], с.47.
[3] [4], с.37.
[4] [4], с.39.

Коротко это звучит так. Квантовые объекты - это по своей природе неделимые объекты. Его состояние можно изменить, но выделить какую-то его часть нельзя.

19.4. Химические элементы

Другая проблема, которую не могла решить классическая физика, это существование атомов химических элементов с определенными свойствами. Принятая после опытов Резерфорда планетарная модель атома в рамках классических представлений оказалась неприемлемой.

Прежде всего, электрон при ускоренном движении по орбите (центростремительное ускорение!) должен терять энергию, излучая электромагнитную волну. Кроме того, в рамках классических представлений невозможно объяснить, почему атом меди, например, всегда остается атомом меди независимо от того, каким способом, где и когда была получена медь.

Звездные системы со своими планетами, которые дали название принятой в физике модели атома, обязательно различны. И не удивительно - движение планет описывается классической физикой. Так почему атомы, образованные квантовыми объектами, идентичны? Ответ, мне кажется, достаточно ясен:

"*Во многих отношениях электронные орбиты демонстрируют поразительное сходство с волновыми колебаниями, локализованными в пределах атома. Например, волна, ограниченная определенным объемом, т.е.* ***стоячая волна****, может иметь только определенное число конфигураций... Эти конфигурации вполне определенны и имеют простые симметричные структуры - факт, известный из наблюдения других стоячих волн, например, колебаний скрипичной струны или волн в воздушном столбе органной трубы. Они обладают свойством «восстановления»; если возмущающий эффект изменил их форму, первичная конфигурация волн восстанавливается, когда действие возмущения прекращается.*" [5]

Итак, стабильность атома обеспечивается волновыми свойствами электронов. Но для понимания квантовых объектов важно еще понимание того, что определенной конфигурации стоячей электронной волны отвечает определенная энергия. Мы это видели на примере бесконечно глубокой одномерной потенциальной ямы.

В то же время следует знать и помнить, что уравнением Шрёдингера описываются отнюдь не все свойства электрона. Например, в нем отсутствует спин. И уж никак из этого уравнения не следует принцип Паули, согласно которому в атоме может быть лишь два электрона с некоторой определенной конфигурацией стоячей волны.

Эти конфигурации характеризуются набором квантовых чисел. Поэтому применительно к атому принцип Паули формулируется так: в атоме может существовать лишь два электрона с одинаковым набором квантовых чисел, различающиеся знаком спина. Если спиновое квантовое число $s = \pm 1/2$ ввести в общий набор квантовых чисел, формулировка принципа Паули становится более лаконичной: каждый электрон в атоме должен иметь свой набор квантовых чисел.

Здесь, видимо, вновь следует обратиться к вопросу о "понятности" свойств квантового объекта, в частности, электрона. Мы не можем дать какого-то объяснения принципу Паули, равно как волновой природе квантового объекта, как, впрочем, и "понятному" закону со-

[5] [4], с.38.

хранения энергии, например. Все это лишь констатация свойств природы, выясненных в результате наблюдений и экспериментов. Мы не придумываем природу, мы ее изучаем.

19.5. Нормирование волновой функции

Уравнением Шрёдингера волновая функция определяется с точностью до постоянного множителя. Этот множитель определяется с помощью условия нормировки

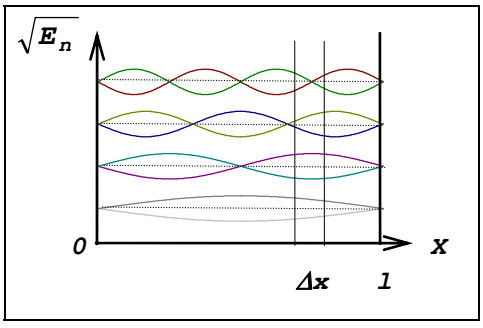
$$\int_V |\Psi|^2 \, dV = \int_V \Psi\Psi^* dV = 1 .$$

Размерность амплитуды Ψ-функции оказывается, таким образом, обратно пропорциональной объему и квадрат ее модуля называют плотностью вероятности обнаружения, например, электрона в некоторой области пространства. Оставим условие нормировки и терминологию такими, но обдумаем их смысл. Заранее оговорюсь, что понимать все это буквально не следует.

Во-первых, само слово "обнаружить" электрон в некоторой области пространства приемлемо лишь в том случае, если мы *считаем*, что он в момент обнаружения там *находится*. Нельзя обнаружить то, чего нет. В действительности дело обстоит, мягко говоря, не так.

Пусть электрон локализован в некотором более или менее строго очерченном объеме ΔV. Далее предположим, что в результате некоторых наших действий он оказался локализован ("обнаружен") в объеме $\delta V < \Delta V$. Это автоматически означает увеличение его энергии, изменение квантового состояния. Это уже не тот электрон (не в том состоянии), который мы имели до "обнаружения". Измерение, уточнение значений его координат "*уничтожает условия существования квантового состояния*" (ссылка [1]).

Обратимся вновь к модельной задаче о состоянии электрона в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме." В этом случае (задача одномерная) условие нормировки принимает вид:



$$\int_0^1 \Psi\Psi^* dx = 1 .$$

При этом минимальная энергия электрона

$$E_{1,1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} .$$

При "обнаружении" электрона в интервале Δx минимальная его энергия возрастет до

$$E_{1,\Delta x} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\Delta x^2} .$$

Вот как обстоят дела при "обнаружении" электрона в некоторой области пространства: при этом увеличивается его энергия. Обнаружение же электрона "в точке" просто бессмысленно, поскольку это означало бы бесконечное увеличение его энергии. Вот мнение В.Вайскопфа по этому поводу:

"Волновая природа атомного электрона связана с неделимостью, целостностью атомного состояния. Если выделить часть процесса и затем пытаться установить более точно, действительно ли электрон находится внутри этой волны, его можно обнаружить там как реальную частицу, но при этом нарушится деликатная индивидуальность квантового состояния. Однако именно волновая природа обусловливает характерные особенности квантового состояния – его простую геометрию, восстановление первоначальной формы после окончания действия возмущения, короче говоря, специфические свойства атома. Великим открытием квантовой физики явилось обнаружение существования этих индивидуальных квантовых состояний, каждое из которых представляет собой единое целое, пока не подвергается воздействию средств наблюдения. Любая попытка наблюдать выделенную часть состояния связана с использованием столь высокой энергии, что при этом разрушается хрупкая структура квантового состояния.

Та же ситуация наблюдается и в обсуждавшемся выше случае электронного пучка, проходящего сквозь пару щелей в экране и создающего за ним интерференционные явления. Этот процесс также индивидуален и неделим. Когда пытаются выполнить опыт, чтобы обнаружить, через какую именно щель прошел электрон, явление интерференции пропадает: опыт оказывается слишком сильнодействующим, он нарушает целостность квантового состояния." [6]

Вспомним еще раз, что это воображаемый опыт. Заключения по поводу того или иного эффекта основаны на уже существующих представлениях о свойствах квантового состояния электрона. И он в момент прохождения пары щелей находится в некотором определенном состоянии, которое, естественно, разрушается при его "обнаружении" вблизи одной из щелей, при его локализации в пределах размеров одной щели. Что же тут загадочного, если после этого не наблюдается картина дифракции на *двух* щелях? Другое дело, если длина волны света, используемого для "зондирования", больше расстояния между щелями: возмущение слабое, интерференция наблюдается.

Я хочу теперь еще раз сформулировать *свое* мнение. Само словосочетание "частица обладает волновыми свойствами" бессмысленно. То, что мы называем электроном-частицей, представляет собой некий сложный объект, исчерпывающего описания для которого у нас нет. Но даже и в том случае, если бы такое описание нам было известно, оно наверняка было бы достаточно сложным, и едва ли мы стали бы им пользоваться. Чтобы понять некоторые эффекты, чтобы провести расчеты для предсказания поведения реального электрона, мы воспользовались бы *либо волновым, либо корпускулярным* приближением. Но никак не обоими одновременно.

[6] [4], с.40.

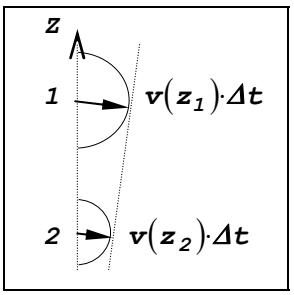
Лекция 22

20. Стоячие волны. Рефракция

Мы рассмотрели стоячие волны для Ψ-функции в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Но и в других случаях стационарное решение уравнения Шрёдингера представляет собой стоячую волну, хотя это не всегда столь очевидно.

Какой может быть, например, стоячая волна Ψ-функции электрона в поле протона, в атоме водорода? Ведь в этом случае, вроде бы, вообще нет каких-нибудь отражающих волну стенок. И в этой связи мы вспомним о явлении, которое, вообще говоря, заслуживает более детального разговора, - о рефракции.

Говоря о прямолинейности распространения света, например, мы подразумевали однородную среду. Но в неоднородной среде направление распространения волны не остается постоянным.



Пусть в неоднородной среде распространяется волна с плоским фронтом. И пусть скорость волны (фазовая) возрастает в направлении оси z, параллельной фронту. Основываясь на принципе Гюйгенса-Френеля, рассмотрим каждую точку фронта волны как источник вторичных волн. Тогда "новый" фронт (плоскость, касательная к волновым поверхностям вторичных источников) не будет параллелен старому, будет происходить искривление луча, понимаемого как кривая, касательная к которой перпендикулярна фронту волны. Вот это явление "искривления" луча в неоднородной среде и называется рефракцией.

Проявления рефракции весьма разнообразны, и подробный разговор о ней мог бы быть достаточно интересен. Но - нельзя объять необъятное и особенно за весьма ограниченное время, которое есть в нашем распоряжении. Однако, посмотрим, как это явление проявляется в атоме водорода.

В поле протона по мере увеличения радиуса потенциальная энергия электрона возрастает. При постоянной полной энергии $E = const$ это означает уменьшение кинетической энергии, уменьшение импульса:

$$E - U = \frac{p^2}{2m}; \qquad E = \hbar\omega; \qquad p = \hbar k; \qquad v = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}.$$

Так что уменьшение импульса означает и увеличение фазовой скорости v при увеличении радиуса r. Таким образом, луч электронной волны будет искривляться в направлении к протону и при определенных условиях может стать окружностью. При каких?

Условие, которое должно быть выполнено, достаточно очевидно. Поскольку длина окружности пропорциональна радиусу, пропорциональной радиусу должна быть и фазовая скорость. Таким образом мы получаем:

$$\frac{v}{r} = \frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{E}{p} = -\frac{E}{p^2}\frac{dp}{dr}.$$

Исключив фазовую скорость, получим выражение для зависимости импульса от радиуса:

$$\frac{v}{r} = \frac{v}{p}\frac{p}{r} = \frac{E}{p^2}\frac{p}{r} = -\frac{E}{p^2}\frac{dp}{dr}; \qquad \frac{p}{r} = -\frac{dp}{dr}.$$

Запишем вновь выражение для энергии электрона и продифференцируем его по радиусу. С учетом выражения для dp/dr и условия $E = const$ мы получим:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}; \qquad \frac{p}{m}\frac{dp}{dr} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 0; \qquad \underline{\frac{p^2}{mr} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 0}.$$

Нам осталось лишь потребовать выполнения очевидного для существования стоячей волны условия - на длине орбиты должно укладываться целое число длин волн $\lambda = 2\pi\hbar/p$:

$$\frac{(2\pi r_n)}{2\pi\hbar} p_n = n; \qquad \underline{p_n = \frac{\hbar n}{r_n}}.$$

Из двух подчеркнутых выражений следует:

$$p_n^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{r_n^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{me^2}{r_n}; \qquad r_n = 4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2}{me^2}n^2.$$

Таким образом, выражение для энергии электрона принимает вид:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}.$$

Это выражение для электрона совпадает с точным значением, полученным из решения уравнения Шрёдингера. Наши оценочные расчеты никак не избавляют от необходимости решать это уравнение. Они должны лишь помочь понять, что квантовое состояние электрона в атоме описывается стоячей волной.

21. "Внутреннее движение" квантового состояния

Все то, о чем мы сейчас ведем речь, вообще говоря, не имеет прямого отношения к решению задач о поведении электрона в том или ином случае. Просто слишком часто квантовая физика противопоставляется классической, тогда как в ряде своих проявлений новая физика оказывается прямой "наследницей" старой.

Мы говорили о том, *что принципиально новое* привносит квантование в физику. Неплохо отметить и те воззрения, что могут быть оставлены без изменений.

Обратимся вновь к задаче об электроне в потенциальной яме. Квадрат модуля Ψ-функции для любого n является функцией координаты, не зависит от времени:

$$\Psi_n(x,t) = 2\psi_{n0}\cos(k_n x)\exp(-i\omega_n t); \qquad \Psi_n\Psi_n^* = 4\psi_{n0}\psi_{n0}^*\cos^2(k_n x).$$

Никакого "движения материи" в этом выражении не видно. И тем не менее энергию электрона мы можем подсчитать как кинетическую энергию $E = p^2/2m$, тем не менее на стенку ямы действует сила $F = 2E/l$. В этом не будет ничего загадочного, если мы не станем отказывать волне Ψ-функции в реальности, будем помнить, что стоячая волна представляет собой сумму бегущих в противоположных направлениях волн, которые отражаются от стенок. Волна переносит импульс и при отражении происходит изменение его направления. Конечно, как непрерывный процесс, а не "мгновенное", как при корпускулярном представлении электрона.

При этом то обстоятельство, что функция $f_n = \Psi_n\Psi_n^*$ не зависит от времени, дает хорошее, естественное объяснение того, почему в стационарном состоянии *не происходит* излучения электромагнитной энергии - нет колебаний электрического заряда.

Линейному волновому уравнению Шрёдингера удовлетворяет и волновая функция, представляющая собой суперпозицию двух (стоячих) волн с разными частотами и волновыми числами:

$$\Psi_{nm} = \Psi_n + \Psi_m =$$
$$= 2\psi_{n0}\cos(k_n x)\exp(-i\omega_n t) + 2\psi_{m0}\cos(k_m x)\exp(-i\omega_m t).$$

Квадрат модуля этой функции:

$$\Psi_{nm}\Psi_{nm}^* =$$
$$= \left[2\psi_{n0}\cos(k_n x)\exp(-i\omega_n t) + 2\psi_{m0}\cos(k_m x)\exp(-i\omega_m t)\right] \times$$
$$\times \left[2\psi_{n0}^*\cos(k_n x)\exp(+i\omega_n t) + 2\psi_{m0}^*\cos(k_m x)\exp(+i\omega_m t)\right].$$

Выражение получается достаточно громоздким, но легко видеть, что его можно записать в виде:

$$\Psi_{nm}\Psi_{nm}^* = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\cos\left((\omega_n - \omega_m)t + \delta\right).$$

Если не придумывать для квантового объекта какого-то нового способа излучения электромагнитной энергии кроме осцилляции заряда, то это выражение "объяснит" нам, почему при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой, в процессе такого перехода происходит поглощение или излучение электромагнитной энергии на частоте $\omega = |E_n - E_m|/\mathrm{h}$.

Иногда говорят, что наблюдаются только стационарные состояния электрона, например, в случае атома водорода

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\mathrm{h}^2}\frac{1}{n^2}.$$

Пожалуй, можно сказать, что это утверждение верно с точностью до наоборот: наблюдается, собственно, излучение или поглощение электромагнитной энергии, которые происходят при изменении энергии электрона от одного квантованного значения до другого. Если, конечно, признать, что процесс, например, излучения занимает некоторое время, и что в квантовой физике выполняется закон сохранения энергии.

Подчеркну еще раз: предлагаемые рассуждения никаким образом не влияют на практическое решение квантовомеханических задач. Речь идет только о "картинке" процесса, которую Вы можете иметь у себя в голове. Если Вам понятнее утверждение, что в квантовой физике излучение никак не связано с осцилляцией заряда, то - воля Ваша. Правда, давно было сказано: "Не умножай число сущностей без надобности".

Но при этом необходимо отметить и такое обстоятельство. Экспериментально наблюдать осцилляцию заряда мы не можем - при попытке такого наблюдения разрушится "*хрупкая индивидуальность квантового состояния*". Об осцилляции свидетельствует лишь то, что происходит излучение или поглощение электромагнитной энергии.

22. Квантование момента импульса

Другое "скрытое движение" внутри квантового объекта проявляется в наличии момента импульса его состояния. В случае, например, стоячей электронной волны в поле ядра атома момент импульса не определяется с помощью суммирования элементарных моментов импульсов, его (момента импульса) наличие или отсутствие явной связи с некоторым движением не обнаруживает. Однако, у нас нет и оснований считать, что момент импульса в этом случае создается как-то иначе, чем в физике обыкновенной, как-то без движения. Вспомните, что мы говорили об импульсе электрона в одномерной потенциальной яме.

При решении уравнения Шрёдингера определяется лишь модуль (точнее, квадрат модуля) момента импульса и одна из проекций (составляющих?) момента импульса. Но - не любая, а лишь проекция на ось симметрии квадрата модуля волновой функции (ось квантования). Так что обычное небрежное замечание, что может быть определена лишь одна из проекций M_x, M_y или M_z значит не более, чем утверждение, что ось квантования мы можем обозначить любой буквой. И направить ее, как нам захочется

Попробуем представить себе обособленный, *не испытывающий внешних воздействий* атом. Как направлен его момент импульса? Как направлена ось симметрии состояния? Видимо, ответ должен быть такой - как угодно. Положим, мы хотим определить эти направления. Если Вы сразу вспомните, что измерения характеристик квантового состояния сопряжены с изменением самого состояния, это очень хорошо. Но - тем не менее.

Направление момента импульса нам определить никак не удастся - оно не определяет каких-нибудь физических процессов или их характеристик. И здесь мы встречаемся с изумительной гармонией: то, что мы не можем определить экспериментально, не может быть и рассчитано. И это, видимо, должно нас радовать, это означает, что наши уравнения описывают реальные физические процессы. Эта гармония не является особенностью квантовой механики. Так же обстоит дело и с потенциальной энергией - она определена с точностью до произвольного слагаемого. Экспериментально определяется только изменение, при-

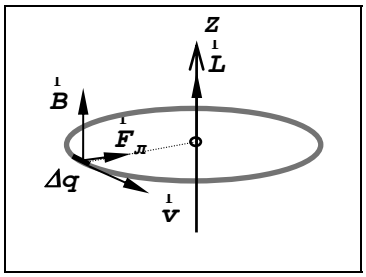
ращение потенциальной энергии. Соответственно, у нас нет и возможности рассчитать однозначное ее значение.

Теперь - ось квантования. Если мы поместим атом в электрическое или магнитное поле, она окажется направленной вдоль поля. *Магнитное квантовое число* ***m*** определяет составляющую момента импульса электрона вдоль оси квантования. Экспериментально это проявляется в том, что в результате взаимодействия с полем изменяется энергия состояния. Это изменение энергии пропорционально величине магнитного поля и составляющей магнитного момента вдоль оси квантования. Величина магнитного момента считается пропорциональной механическому моменту, и изменение энергии электрона в магнитном поле, таким образом, связывается с магнитным квантовым числом. Почему оно так и называется.

23. Классический гироскоп в магнитном поле

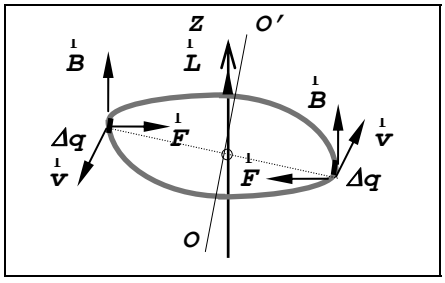
Момент импульса электрона (атома) не может быть направлен вдоль оси квантования, как иногда говорят, вдоль "физически выделенного направления". Бытует мнение, что это одна из особенностей квантовой механики. Я хочу обсудить этот вопрос применительно к классической физике.

Будем рассматривать гироскоп в виде несущего некоторый заряд кольца. Гироскоп обычно определяют как тело, имеющее ось симметрии и быстро раскрученное вокруг этой оси. Момент импульса такого гироскопа направлен вдоль его оси симметрии.



Поместив вращающееся заряженное кольцо в магнитное поле, мы легко убедимся, что действующий на него момент сил равен нулю. В самом деле, действующая на любой выделенный участок кольца с зарядом ***Δq*** сила имеет нулевой момент относительно центра кольца.

Однако, такое движение гироскопа представляет собой лишь частный случай. В общем случае направление момента импульса не обязательно совпадает с осью симметрии гироскопа. Такое движение можно легко наблюдать, подбросив с закручиванием какой-нибудь диск (например, плоскую тарелку) в воздух. Почти наверняка Ваш диск в полете будет покачиваться. Происходит это потому, что в отсутствии моментов внешних сил момент импульса остается постоянным, а ось симметрии, не совпадающая с моментом импульса, описывает конус вокруг его направления.



Рассмотрим именно такое движение заряженного кольца в магнитном поле. Выделим два малых участка кольца с зарядами ***Δq*** на концах диаметра, который лежит в одной плоскости с вектором момента импульса $\vec{L}$ и осью симметрии ***OO′***. Хотя поле $\vec{B}$ параллельно вектору момента импульса, момент сил относительно центра кольца отличен от нуля.

Этот результат наводит на определенные размышления. Во-первых, он означает, что в общем случае момент импульса гироскопа, несущего электрический заряд, и в классической физике не может совпадать с направлением магнитного поля. И другое, быть может, более важное.

Момент импульса и магнитный момент, которым определяется взаимодействие такого гироскопа с магнитным полем, *не направлены по одной прямой*. Не рассматривая этой задачи более подробно, я хочу лишь обратить Ваше внимание на то, что при анализе поведения атома

в магнитном поле без какого-нибудь обоснования считается, что эти векторы *направлены по одной прямой*.

Но все это только наводит на определенные размышления. Каких-нибудь выводов я здесь делать не хочу.

24. Эпилог

Мы с Вами заканчиваем разговор о физике в рамках "*физики общей*". В разделе "***Механика и молекулярная физика***" за основу было взято рассмотрение механического движения в приближении *материальной точки*, *твердого тела*, *деформируемого тела* и *молекулярного движения*, для описания которого оказалось необходимым использование вероятностного подхода.

В разделе "***Электричество и магнетизм***" мы сосредоточились на рассмотрении стационарных или квазистационарных полей. Собственно, одного - электромагнитного поля.

Наконец, третий раздел "***Волны***" был посвящен рассмотрению волновых процессов и закончился обсуждением явления, которое обычно называют *волновыми свойствами частиц*. Здесь мы обсудили некоторые вопросы интерпретации представлений квантовой физики. Считая, что это не вопрос общей физики, математического аппарата и большинства результатов, полученных квантовой физикой, я не касался.

Курс получился достаточно сложный. Я все время старался, чтобы обсуждаемые явления и результаты были *понятны*. Увы, это очень несовременный подход. В чем это проявляется? Например, уже в том, что последняя книжка Савельева названа учебником. До того учебников по физике для ВУЗов не существовало. Были только *учебные пособия*. В разных ***пособиях*** некоторые вопросы иногда трактовались по-разному. Учебники такой вольности не допускают.

Современным, к сожалению, часто оказывается формальное запоминание и пересказ предложенного материала на экзамене. Как заметил один китайский профессор, "*похоже, мы учим студентов не физике, а тому, как сдать экзамен*". Не случайно слова "*получить образование*" прочно забыты. Сейчас при обучении "*даются знания*". Такой способ учебы раньше назывался ***зубрежкой***. Сейчас это норма.

Очень может быть, что при обсуждении проблем квантовой физики я был в чем-то очень не прав. Но и частое предложение давать квантовые представления ***в рецептурном плане*** мне очень не нравится - как можно отказываться от хотя бы попыток понять смысл физики? Понимать сложно, но только в понимании смысл образования.

На этом я прощаюсь с Вами, впрочем, пока что только до экзамена. Последнего Вашего экзамена по общей физике.